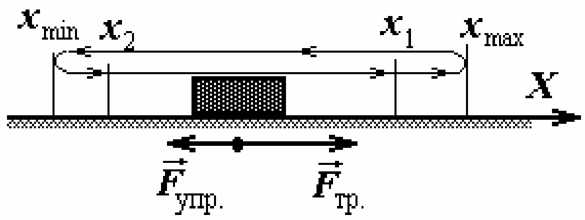
2. **«Застой».**



Будем рассматривать движение бруска в системе отсчета, связанной с неподвижным упором. Пусть в некоторый момент времени брусок покоится относительно ленты (т.е. движется со скоростью ленты в выбранной системе отсчета). В это время сила трения, действующая на брусок, является силой трения покоя, поэтому максимальна. Такое движение бруска возможно пока увеличивающаяся сила упругости пружинки не превысит силу трения покоя. (Обозначим координату этой точки x_1). После ее прохождения брусок начнет скользить относительно ленты, поэтому сила трения скачком уменьшится до силы трения скольжения. Однако, некоторое время брусок будет продолжать двигаться в прежнем направлении по инерции (т.к. он имел скорость, равную скорости ленты). Сместившись на максимальное расстояние x_{max}, он начнет двигаться в обратном направлении с ускорением, определяемым силами трения и упругости, до некоторого положения x_{min}. Затем направление его движения опять изменится, его скорость начнет возрастать до тех пор, пока не станет равной скорости ленты (точку, в которой это произойдет, обозначим x_2), после чего процесс повторится - брусок станет двигаться до точки x_1 со скоростью ленты и т.д. Заметим, что потери механической энергии бруска из-за трения скольжения компенсируются работой сил трения покоя.

Координату точки x_1, в которой начинается скольжение бруска относительно ленты, найдем из условия равенства силы упругости и силы трения покоя:

$$kx_1 = \mu_0 mg, \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\mu_0 mg}{k} \quad . \tag{1}$$

Пока брусок скользит относительно ленты, его уравнение движения имеет вид, записанный на основании 2 закона Ньютона:

$$ma = -kx + \mu mg\,. \tag{2}$$

Следует отметить, что на этом участке сила трения не изменяет своего направления. Уравнение (2) перепишем в виде

$$a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right), \tag{3}$$

совпадающем с уравнением гармонических колебаний для величины $\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right)$. Поэтому его полное решение имеет вид

$$x - \frac{\mu mg}{k} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\,, \tag{4}$$

где обозначена

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

собственная частота колебаний бруска на пружине. Произвольные постоянные A, B в выражении (4) определяются из начальных условий. Из выражения (4) следует, что скорость бруска зависит от времени по закону

$$v = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t . \tag{6}$$

Учитывая, что в момент начала скольжения (будем считать этот момент началом отсчета времени $t = 0$) координата бруска равна x_1, определяемая формулой (1), а его скорость равна скорости ленты v_0, из формул (4), (6) легко определить неизвестные коэффициенты A, B. Окончательно законы изменения координаты и скорости бруска от времени имеет вид (напомним, что эти законы справедливы только для этапа скольжения бруска относительно ленты)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mu mg}{k} + \frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ v &= -\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\omega_0 \sin\omega_0 t + v_0 \cos\omega_0 t \end{aligned} . \tag{7}$$

Преобразуя тригонометрическую сумму традиционным образом перепишем еще раз закон движения бруска

$$x = \frac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\, \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{8}$$

где φ не существенный для дальнейшего решения задачи фазовый сдвиг. Теперь не составляет труда найти максимальное и минимальное смещения бруска

$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ x_{min} &= \frac{\mu mg}{k} - \sqrt{\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned} . \tag{9}$$

Подстановка численных данных приводит к следующему результату $x_{max} \approx 3{,}2 см; \quad x_{min} \approx 1{,}8 см$.

Далее нам необходимо найти момент времени t_1, когда скорость бруска станет равной скорости ленты v_0. Для этого следует решить второе уравнение системы (7), полагая в нем $v = v_0$:

$$v_0 = -\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\omega_0 \sin\omega_0 t_1 + v_0 \cos\omega_0 t_1 . \tag{10}$$

В интересующем нас диапазоне решение этого уравнения имеет вид

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0} arctg\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg\omega_0}{kv_0}\right). \tag{11}$$

Подстановка этого значения времени в закон движения бруска дает значение координаты x_2, в которой скорости бруска и ленты сравниваются (прямая подстановка требует определенной аккуратности в проведении тригонометрических преобразований)

$$x_2 = -\frac{\mu_0 mg}{k} + 2\frac{\mu mg}{k} . \tag{12}$$

Заметим, что этот же результат можно получить более простым способом, рассматривая закон изменения энергии бруска и пружины

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} + \mu mg\left(x_1 - x_2\right). \qquad (13)$$

Далее брусок движется с постоянной скоростью, поэтому его закон движения на этом участке выражается формулой

$$x = x_2 + v_0\left(t - t_1\right), \qquad (14)$$

до тех пор пока его координата не достигнет значения x_1 (с которого мы и начали рассмотрение движения бруска). Это произойдет в момент времени

$$t_2 = t_1 + \frac{x_1 - x_2}{v_0} = \\ = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0} arctg\left(\frac{\left(\mu_0 - \mu\right)mg\omega_0}{kv_0}\right) + \frac{2\left(\mu_0 - \mu\right)mg}{kv_0}. \qquad (15)$$

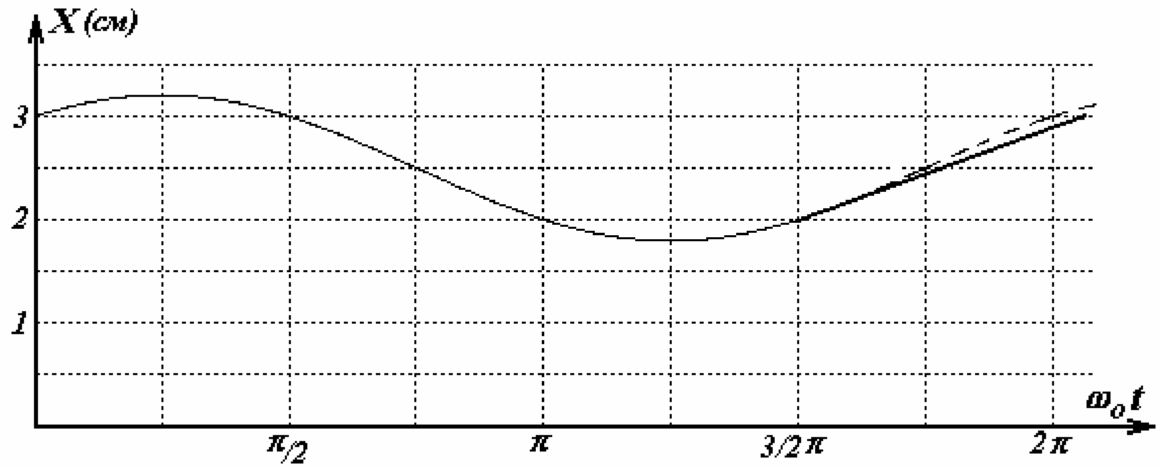
Очевидно, что это выражение и определяет период колебаний бруска. Численное значение периода колебаний $T \approx 0{,}67c$, что незначительно превышает период свободных колебаний бруска на пружине.

Для построения графика закона движения подставим численные значения в функцию закона движения (7), что приводит ее к виду

$$x = 2{,}5 + 0{,}5\cos\omega_0 t + 0{,}5\sin\omega_0 t,$$

далее можно заметить, что момент времени t_1 приблизительно соответствует значению $\omega_0 t_1 \approx \frac{3}{2}\pi$. После этой точки график закона движения - прямая линия.

В результате таких рассуждений можно получить следующий график (пунктир - продолжение гармонических колебаний).



3. **«Пыль».**

Перенос заряда между платинами осуществляется пылинками, которые заряжаются (и перезаряжаются) при соприкосновении с пластинами. Величину заряда пылинки q можно найти из условия равенства потенциала шарика и пластины

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \pm\frac{U}{2}, \quad \Rightarrow \quad |q| = 2\pi\varepsilon_0 rU. \qquad (1)$$

При оговоренных условиях пылинки будут двигаться равноускоренно, при чем максимальная их скорость может быть найдена из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = qU, \qquad (2)$$

Тогда средняя скорость движения пылинок (учитывая, что начальная скорость равна нулю, а ускорение постоянно) определяется выражением

$$v_{cp} = \frac{v_{max}}{2} = \sqrt{\frac{qU}{2m}} = U\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 r}{m}}. \qquad (3)$$

Следовательно, плотность тока между пластинами равна

$$j = qnv_{cp} = 2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 r}{m}}nU^2, \qquad (4)$$

наконец, искомое значение силы тока

$$I = jS = 2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 r}{m}}nSU^2. \qquad (5)$$

Отметим, что для рассматриваемой системы закон Ома не выполняется.

Этот же результат может быть получен из следующих рассуждений: Сила тока, по определению, равна $I = \frac{qN}{\tau}$*, где* τ *- время пролета пылинки от одной пластины до другой, которое находится из следующих соотношений* $\tau = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2hm}{qE}} = \sqrt{\frac{2h^2 m}{qU}}$*, что приводит к той же формуле (5).*

Для оценки времени разрядки выразим заряд пластины Q через напряжение между обкладками $Q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{h}U$. Уменьшение напряжение на η процентов, соответствует такому же уменьшению заряда на пластинах . Следовательно за искомое время Δt, электрический ток должен «перенести» заряд ηQ, что приводит к уравнению

$$I\Delta t = \eta Q, \quad \Rightarrow \quad 2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 r}{m}}nSU^2\Delta t = \eta\frac{\varepsilon_0 S}{h}U, \qquad (6)$$

из которого определяем время уменьшения заряда (заметим, что изменение заряда мало, поэтому напряжение можно считать постоянным и равным напряжению батареи):

$$\Delta t = \frac{\eta}{2\pi rnhU}\sqrt{\frac{m}{\pi\varepsilon_0 r}}. \qquad (7)$$

4. «Двойная интерференция»