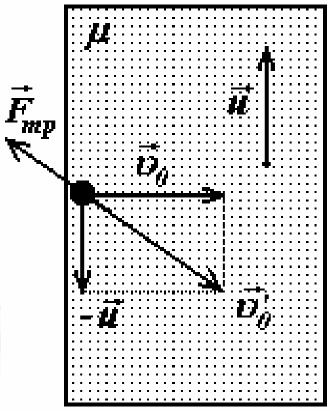
10 класс.

Задача 1.

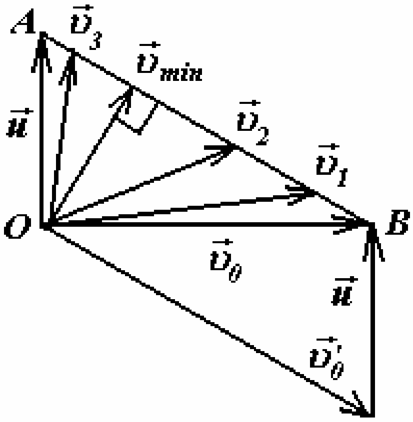


Сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, действующая на шайбу в начальный момент времени, направлена против относительной скорости скольжения шайбы по транспортеру $\vec{\upsilon}'_0$, которая может быть найдена из преобразований Галилея

$$\vec{\upsilon}'_0 = \vec{\upsilon}_0 - \vec{u} \;\Rightarrow\; \upsilon'_0 = \sqrt{\upsilon_0^2 + u^2}\,. \qquad (1)$$

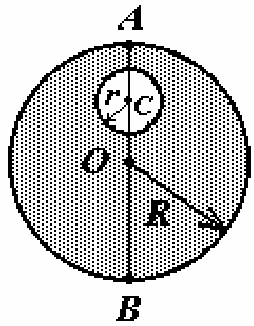
Таким образом, в инерциальной системе отсчета, связанной с лентой транспортера, шайба будет двигаться равноускоренно по прямой до полной остановки с отрицательным ускорением

$$a = -\frac{F_{тр}}{m} = -\frac{\mu m g}{m} = -\mu g\,. \qquad (2)$$



Как следует из обратных преобразований Галилея, скорость шайбы относительно земли будет изменяться с течением времени от $\vec{\upsilon}_0$ до $\vec{u}$ таким образом, что концы векторов мгновенных скоростей $\vec{\upsilon}_i$ будут скользить вдоль отрезка *AB*, образуя так называемый *годограф* скоростей. Из анализа годографа скоростей понятно, что минимальное значение скорости шайбы относительно земли $\vec{\upsilon}_{min}$ достигается в момент времени, когда вектор мгновенной скорости нормален отрезку *AB*. Из прямоугольного треугольника *AOB* находим $\upsilon_{min} = \upsilon_0 \dfrac{u}{\sqrt{\upsilon_0^2 + u^2}}$

Задача 2.



Решение: наименьшее значение ускорения свободного падения $g_{min} = 0{,}938\ g_0$ на поверхности астероида достигается в точке, где верхний край полости подходит к поверхности астероида ближе всего. Следовательно, центр полости (точка *C* на рисунке*)* расположен на отрезке *AO* на некоторой неизвестной глубине $AC = a$, где точка *O* — центр однородного астероида.

Масса изъятой из астероида в процессе разработки породы $m = \rho \dfrac{4}{3}\pi r^3$, где ρ — плотность вещества астероида, r — искомый радиус полости. Для решения задачи мысленно «добавим» выработанную породу обратно. Тогда на всей поверхности астероида должно «восстановится» прежнее значение ускорения свободного падения — g_0. Но с другой стороны для точки A можем записать

$$g_0 = g_{min} + \Delta g_A,$$

где Δg_A — ускорение, создаваемое добавленной массой. С учетом закона гравитации Ньютона получаем

$$\Delta g_A = G\frac{4/3\pi r^3 \rho}{a^2}.$$

Аналогичное равенство можно записать и для точки B астероида

$$g_0 = g_{max} + \Delta g_B,$$

где $\Delta g_B = G\dfrac{4/3\pi r^3}{(2R-a)^2}$. Таким образом, для нахождения глубины залегания центра полости a и ее радиуса r имеем систему уравнений

$$g_{min} = g_A = \frac{4}{3}G\pi\rho(R - \frac{r^3}{a^2}) \qquad (1)$$

$$g_{max} = g_B = \frac{4}{3}G\pi\rho(R - \frac{r^3}{(2R-a)^2}). \qquad (2)$$

Выражая из первого уравнения

$$r^3 = \frac{3}{4G\pi\rho}a^2(g_0 - g_{min})$$

и подставляя полученное значение во второе уравнение, найдем

$$a = 2R\frac{\sqrt{g_0 - g_{max}}}{\sqrt{g_0 - g_{max}} + \sqrt{g_0 - g_{min}}} = 2R\frac{\sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_2} + \sqrt{\eta_1}}. \qquad (3)$$

Соответственно, для радиуса полости имеем

$$r = R\sqrt[3]{\frac{4(g_0 - g_{max})(g_0 - g_{min})}{g_0(\sqrt{g_0 - g_{max}} + \sqrt{g_0 - g_{min}})^2}} = R\sqrt[3]{\frac{4\eta_2\eta_1}{(\sqrt{\eta_2} + \sqrt{\eta_1})^2}}. \qquad (4)$$

Подставляя в (3) и (4) числовые данные, находим

$$a = 0{,}503R \approx \frac{R}{2}; \quad r = 0{,}250R \approx \frac{R}{4}.$$

Задача 3.

При изменении магнитного потока через проводящий контур в нем возникает ЭДС индукции, приводящая к появлению электрического тока. Эти токи создают свое магнитное поле, которое взаимодействует с движущимся магнитом, вследствие чего и появляются силы «вязкого трения». Существует достаточно простой метод расчета этих сил: работа сил трения в точности равна количеству Джоулевой теплоты индукционных токов. Поэтому решение данной задачи сводится к вычислению мощности индукционного тока в кольце с последующим расчетом силы вязкости.