Вычислим магнитный поток через кольцо. Этот поток удобно рассчитывать через участок сферической поверхности Ω, опирающейся на кольцо, с центром, находящимся в центре магнита. На этой поверхности радиальная составляющая магнитного поля является нормальной, поэтому магнитный поток через малую площадку ΔS равен $\Delta\Phi = B_r \Delta S$. Поток через контур вычисляется как сумма потоков через все малые площадки на рассматриваемом участке сферы

$$\Phi = \sum_i B_{ri}\Delta S_i = \sum_i b\frac{2\cos\theta_i}{r^3}\Delta S_i = \frac{2b}{r^3}\sum_i \Delta S_i \cos\theta_i . \qquad (1)$$

Можно заметить, что $\Delta S_i \cos\theta_i$ является площадью проекции площадки ΔS_i на площадь кольца. Поэтому сумма, стоящая в формуле (1), равна площади кольца πa^2. По теореме Пифагора радиус сферы равен $r = \sqrt{a^2 + z^2}$. Следовательно, поток через кольцо определяется формулой

$$\Phi = \frac{2\pi b a^2}{\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} . \qquad (3)$$

Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции равна производной от магнитного потока по времени

$$E = -\Phi' = \frac{6\pi a^2 bzV}{\left(a^2 + z^2\right)^{5/2}} . \qquad (4)$$

При выводе последнего соотношения учтено, что производная от z равна скорости движения магнита V. По закону Джоуля-Ленца вычислим мощность теплоты, выделяющейся в стержне

$$P = \frac{E^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{6\pi a^2 bzV}{\left(a^2 + z^2\right)^{5/2}}\right)^2 = \frac{36\pi^2 a^4 b^2 z^2}{R\left(a^2 + z^2\right)^5}V^2 . \qquad (5)$$

Равная ей мощность, развиваемая силами вязкости, рассчитывается «по определению» $P = FV$. Из равенства найденных мощностей получаем выражение для магнитной силы

$$F = \frac{36\pi^2 a^4 b^2 z^2}{R\left(a^2 + z^2\right)^5}V . \qquad (6)$$

Задача 4.

1) Для нахождения поверхностной плотности σ' поляризационных зарядов на ленте при выходе из конденсатора будем считать, что вследствие малости скорости движения ленты генератора распределение зарядов на ней будет таким же, как и на неподвижной пластине такой же толщины из такого же диэлектрика, внесенной в конденсатор. Пусть напряженность поля внутри конденсатора вне пластины *E,* тогда внутри пластины — $E_1 = \dfrac{E}{\varepsilon}$. Тогда для разности потенциалов между обкладками (она в данном случае равна напряжению) можем записать

$$U = E(d-h) + \frac{E}{\varepsilon}h \;\Rightarrow\; E = \frac{\varepsilon U}{(d-h)\varepsilon + h} . \qquad (1)$$

Соответственно в диэлектрике модуль напряженности электростатического поля меньше в ε раз

$$E_1 = \frac{U}{(d-h)\varepsilon + h} .$$

С другой стороны, согласно принципу суперпозиции поле в диэлектрике можно рассматривать как сумму внешнего поля $\vec{E}$ и поля индуцированных (поляризационных) зарядов $\vec{E}'$

$$E_1 = \frac{E}{\varepsilon} = E + E' \quad \Rightarrow \quad E' = -E\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \qquad (1)$$

Знак «-» в (1) указывает на противоположность направлений полей (а значит и знаков поверхностных плотностей зарядов) конденсатора и поляризационных зарядов. Поскольку лента внутри конденсатора тоже имеет две плоские поверхности, то окончательно имеем

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{\varepsilon(d-h)+h} = -\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d-h)+h}. \qquad (2)$$

Поскольку щетки купола генератора расположены со стороны отрицательной обкладки конденсатора ($U < 0$), то как видим из (2) заряд ленты (и купола) будет положительным и знак «-» в (2) далее можно опустить.

2) Как видно из схемы генератора поляризационные заряды, снятые с помощью щеток с ленты, подаются на внутреннюю поверхность купола. Однако на проводнике статические заряды могут располагаться только на его поверхности. Следовательно, в течение достаточно малого промежутка времени все заряды в генераторе «переберутся» на внешнюю поверхность купола, освобождая «место» для новой порции заряда с ленты. Поскольку потерь заряда нет, то за время t на сфере генератора окажется суммарный заряд $q(t)$, «принесенный» лентой длиной $l(t) = \upsilon \cdot t$, заряженной с поверхностной плотностью σ'

$$q(t) = \sigma' \cdot S(t) = \sigma a l(t) = \varepsilon_0 a \upsilon t \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d-h)+h}. \qquad (3)$$

Как видим из (3) в отсутствие потерь заряд генератора Ван-дер-Граафа прямо пропорционален времени его работы. На практике это означало бы, что с его помощью можно было бы получать бесконечные напряжения и напряженности полей, чего, конечно же, не происходит вследствие различного рода потерь.

3) Заряды противоположного знака (с внутренней стороны ленты) но такие же по величине (согласно закону сохранения заряда) стекают по шине заземления. Следовательно, сила тока заземления $I_з$

$$I_з = \frac{q(t)}{t} = -\varepsilon_0 a \upsilon \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d-h)+h}. \qquad (4)$$

4) Рассмотрим подробнее механизм потерь заряда с купола генератора. По мере роста заряда генератора $q(t)$ увеличивается модуль напряженности электростатического поля $\vec{E}(t)$ в воздухе ($\varepsilon \approx 1$) вокруг купола. Поскольку воздух можно считать слабопроводящей средой, то согласно закону Ома в дифференциальной форме увеличивается и модуль плотности тока утечки $\vec{j}(t)$ через воздух. Если радиус купола R, то для силы тока утечки находим

$$I(t) = j(t)4\pi R^2 = \left\{ j(t) = \frac{1}{\rho}E(t);\ E(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t)}{R^2} \right\} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t)}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q(t)}{\rho\varepsilon_0}.$$

(5)

Заряд купола перестанет меняться, когда сила тока зарядки купола (равная по модулю силе тока заземления $I_з$) станет равной силе тока утечки $I(t)$ через воздух. Таким образом, для установившегося заряда купола q^* имеем

$$\frac{q^*}{\rho\varepsilon_0} = \varepsilon_0 a\upsilon \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d-h)+h} \quad \Rightarrow \quad q^* = \varepsilon_0^2 \rho a\upsilon \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d-h)+h}. \qquad (6)$$

Подчеркнем, что на практике установившееся значение заряда купола генератора q^* достигается достаточно быстро — именно поэтому генератор Ван-дер-Граафа является источником сильных *электростатических* полей.

5) при зажигании коронного разряда (фантастическое зрелище, слабонервных просим не смотреть!) изменится значение тока утечки (5)

$$I(t) = j(t)4\pi R^2 = \left(\frac{1}{\rho}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t)}{R^2} + \beta\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{q^2(t)}{R^4}\right)4\pi R^2 = \frac{q(t)}{\rho\varepsilon_0} + \beta\frac{q^2(t)}{4\pi\varepsilon_0^2 R^2}. \qquad (7)$$

Соответственно в этом случае установившееся значение заряда на куполе генератора q^{**} найдем из квадратного уравнения

$$\frac{q(t)}{\rho\varepsilon_0} + \beta\frac{q^2(t)}{4\pi\varepsilon_0^2 R^2} = I_з = \varepsilon_0 a\upsilon\frac{(\varepsilon-1)U}{\varepsilon(d-h)+h}. \qquad (8)$$

$$q^{**} = -\frac{2\pi\varepsilon_0 R^2}{\rho\beta} \pm \sqrt{\frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 R^4}{\rho^2\beta^2} + \frac{4\pi\varepsilon_0^2 R^2 I_з}{\beta}} \qquad (9)$$

Как видим из (9) один из корней отрицательный (не имеет физического смысла, поскольку при этом заряды должны сами «стекаться» к куполу и «самопроизвольно» заряжать его). Следовательно, окончательный ответ

$$q^{**} = \sqrt{\frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 R^4}{\rho^2\beta^2} + \frac{4\pi\varepsilon_0^3 R^2}{\beta}\cdot\frac{a\upsilon(\varepsilon-1)U}{\varepsilon(d-h)+h}} - \frac{2\pi\varepsilon_0 R^2}{\rho\beta}.$$