11 класс.

Задача 1.

Уравнение второго закона Ньютона для движущегося шарика имеет вид

$$ma = qE - \beta v \ , \qquad (1)$$

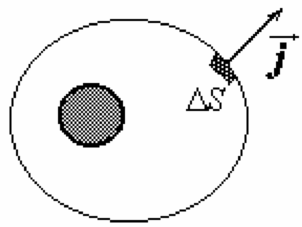
где qE - сила, действующая на шарик со стороны электрического поля, напряженность которого определяется формулой

$$E = \frac{U}{h} . \qquad (2)$$

Учитывая, что шарик легкий, а жидкость вязкая, можно считать, что в любой момент времени сумма сил, действующих на шарик равна нулю, то есть, выполняется соотношение

$$qE = \beta v \ . \qquad (3)$$

Получим уравнение, описывающее, изменение заряда шарика с течением времени. Очевидно, что заряд уменьшается вследствие наличия слабого тока, стекающего с шарика $\frac{\Delta q}{\Delta t} = -I$. Суммарная сила тока, стекающего с шарика, равна потоку вектора плотности тока $\vec{j}$



$$I = \Phi_j = \sum \vec{j} \cdot \vec{n} \Delta S , \qquad (4)$$

через любую замкнутую поверхность, окружающую шарик. По закону Ома плотность тока связана с напряженностью поля соотношением

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} . \qquad (5)$$

Следовательно, поток вектора $\vec{j}$, выражается через поток вектора напряженности соотношением

$$\Phi_j = \frac{1}{\rho} \Phi_E = \frac{q}{\rho \varepsilon \varepsilon_0} , \qquad (6)$$

в котором окончательное выражение получено с помощью теоремы Гаусса.

Заметим, что в выражение (2) диэлектрическая проницаемость жидкости не входит, а при выводе формулы (6) следует учесть поляризационные заряды, возникающие у поверхности шарика.

Таким образом, изменение заряда шарика описывается уравнением

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{q}{\rho \varepsilon \varepsilon_0} . \qquad (7)$$

Выразим из этого уравнения заряд шарика $q = -\rho \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\Delta q}{\Delta t}$ и подставим в уравнение (3) (в котором запишем $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$):

$$\beta \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\rho \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot \frac{U}{h} . \qquad (8)$$

Максимальному смещению шарика соответствует его полная разрядка (в этом случае $\Delta q = -q_0$). Таким образом, из уравнения (8) следует, что максимальное смещение шарика равно $x_{max} = \dfrac{\rho\varepsilon\varepsilon_0 q_0 U}{\beta h}$.

Задача 2.

1. Рассмотрим произвольную частицу облака, находящуюся на расстоянии r до его центра. Как было доказано еще И.Ньютоном, гравитационное поле внутри однородного сферического слоя отсутствует, поэтому сила гравитационного притяжения рассматриваемой частицы полностью обусловлена частицами, находящимися на расстояниях к центру меньших r. Учитывая сферическую симметрию облака, силу гравитационного притяжения рассматриваемой частицы к центру облака можно записать в виде

$$F = G\frac{mM'}{r^2} = G\frac{m}{r^2}M\frac{r^3}{R^3} = \frac{GM}{R^3}mr\,, \qquad (1)$$

где $M' = M\dfrac{r^3}{R^3}$ масса части облака находящаяся внутри сферы радиуса r, M, R - масса и радиус облака, соответственно, m - масса рассматриваемой частицы. Запишем уравнение второго закона Ньютона для частицы

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^3}r\,, \qquad (2)$$

из которого следует, что ускорение частицы пропорционально ее расстоянию до центра. Так в начальный момент времени частицы следует считать неподвижными, то их скорость, и, следовательно, смещение также пропорциональны начальному расстоянию до центра. Из этих рассуждение следует, что расстояния до центра для всех частиц будут уменьшаться в одно и тоже число раз - следовательно, облако останется однородным в любой момент времени. Формализуем эти рассуждения, для чего введем безразмерную переменную $\xi(t) = \dfrac{r(t)}{r_0}$, равную отношению расстояния частицы до центра облака в произвольный момент времени к ее начальному расстоянию. Скорость и ускорение движения частицы могут быть выражены через эту переменную $v = \dfrac{dr}{dt} = r_0\dfrac{d\xi}{dt} = r_0 v_\xi,\quad a = r_0 a_\xi$, где v_ξ, a_ξ - первая и вторая производные от ξ (скорость и ускорение, измеренные в единицах r_0). Подставляя эти значения в уравнение (2), получаем уравнение

$$a_\xi = -\frac{GM}{R^3}\xi\,, \qquad (3)$$

не содержащее начального расстояния. Кроме того, в начальный момент времени для всех частиц облака $\xi_0 = 1$. Следовательно, переменная ξ для всех частиц одинакова в любой момент времени, что еще раз подтверждает вывод о сохранении однородности облака.

2. Так как при движении любой частицы масса части облака, находящейся ближе к центру, остается постоянной, то движение частицы эквивалентно движению в поле точечной массы M', сосредоточенной в центре облака. В этом случае закон сохранения механической энергии для движущейся частицы будет иметь вид