Максимальному смещению шарика соответствует его полная разрядка (в этом случае $\Delta q = -q_0$). Таким образом, из уравнения (8) следует, что максимальное смещение шарика равно $x_{max} = \dfrac{\rho\varepsilon\varepsilon_0 q_0 U}{\beta h}$.

Задача 2.

1. Рассмотрим произвольную частицу облака, находящуюся на расстоянии r до его центра. Как было доказано еще И.Ньютоном, гравитационное поле внутри однородного сферического слоя отсутствует, поэтому сила гравитационного притяжения рассматриваемой частицы полностью обусловлена частицами, находящимися на расстояниях к центру меньших r. Учитывая сферическую симметрию облака, силу гравитационного притяжения рассматриваемой частицы к центру облака можно записать в виде

$$F = G\frac{mM'}{r^2} = G\frac{m}{r^2}M\frac{r^3}{R^3} = \frac{GM}{R^3}mr\,, \qquad (1)$$

где $M' = M\dfrac{r^3}{R^3}$ масса части облака находящаяся внутри сферы радиуса r, M, R - масса и радиус облака, соответственно, m - масса рассматриваемой частицы.
Запишем уравнение второго закона Ньютона для частицы

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^3}r\,, \qquad (2)$$

из которого следует, что ускорение частицы пропорционально ее расстоянию до центра. Так в начальный момент времени частицы следует считать неподвижными, то их скорость, и, следовательно, смещение также пропорциональны начальному расстоянию до центра. Из этих рассуждение следует, что расстояния до центра для всех частиц будут уменьшаться в одно и тоже число раз - следовательно, облако останется однородным в любой момент времени. Формализуем эти рассуждения, для чего введем безразмерную переменную $\xi(t) = \dfrac{r(t)}{r_0}$, равную отношению расстояния частицы до центра облака в произвольный момент времени к ее начальному расстоянию. Скорость и ускорение движения частицы могут быть выражены через эту переменную $v = \dfrac{dr}{dt} = r_0\dfrac{d\xi}{dt} = r_0 v_\xi$, $a = r_0 a_\xi$, где v_ξ, a_ξ - первая и вторая производные от ξ (скорость и ускорение, измеренные в единицах r_0). Подставляя эти значения в уравнение (2), получаем уравнение

$$a_\xi = -\frac{GM}{R^3}\xi\,, \qquad (3)$$

не содержащее начального расстояния. Кроме того, в начальный момент времени для всех частиц облака $\xi_0 = 1$. Следовательно, переменная ξ для всех частиц одинакова в любой момент времени, что еще раз подтверждает вывод о сохранении однородности облака.

2. Так как при движении любой частицы масса части облака, находящейся ближе к центру, остается постоянной, то движение частицы эквивалентно движению в поле точечной массы M', сосредоточенной в центре облака. В этом случае закон сохранения механической энергии для движущейся частицы будет иметь вид

$$\frac{mv^2}{2} = mGM'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = mGM\frac{r_0^3}{R^3}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \\ = mGM\frac{r_0^2}{R^3}\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \quad (4)$$

Вычислим теперь кинетическую энергию всего облака в момент времени, когда радиус облака стал равным $R\xi$. Для этого необходимо просуммировать выражение (4) по всем частицам облака. Так как введенная переменная ξ одинакова для всех частиц, то указанное суммирование можно выполнить, используя начальное расположение частиц (иными словами проинтегрировать выражение (4) по начальным положениям). Выделим в начальном облаке тонкий сферический слой радиусом r_0 и толщиной dr_0. Масса этого слоя $dM = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r_0^2 dr_0 = \frac{3M}{R^3} r_0^2 dr_0$. В процессе сжатия этот слой будет обладать кинетической энергией, определяемой выражением (4), в котором следует заменить m на dM. Выполнив элементарное интегрирование, получим кинетическую энергию облака

$$E = \frac{1}{2}\int_0^R v^2 dM = \int_0^R \frac{3M}{R^3} r_0^2 dr_0 \frac{GM}{R^3} r_0^2 \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\left(\frac{1}{\xi} - 1\right). \quad (5)$$

Это же выражение можно получить как разность между начальной и конечной гравитационной энергией однородного шара.

Теперь следует полученную энергию положить равной внутренней энергии одноатомного идеального газа (фактически мы считаем, что гравитационная энергия перешла в кинетическую, а затем во внутреннюю)

$$U = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}\tilde{R}T, \quad (6)$$

где обозначено $\tilde{R} \approx 8\frac{Дж}{моль \cdot К}$ - универсальная газовая постоянная, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}\frac{кг}{моль}$ - молярная масса атомарного водорода. Из равенства выражений (5) и (6) определяем степень сжатия облака, при котором начинаются термоядерные реакции:

$$\frac{1}{\xi} - 1 = \frac{5}{2}\frac{R\tilde{R}T}{GM\mu} \approx 2 \cdot 10^7,$$

следовательно, звезда «загорится» когда ее радиус станет равным $R^* \approx 1 \cdot 10^9\, м$, что приблизительно соответствует размерам нашего Солнца.

3. Для оценки времени сжатия облака воспользуемся тем обстоятельством, что начальный радиус облака значительно превышает размеры образующейся звезды. Поэтому можно считать, что облако сжимается в точку. В этом случае можно считать, что траектория движения частицы (т.е. отрезок прямой) является очень вытянутым эллипсом. Согласно третьему закону Кеплера период обращения по эллиптической орбите определяется большой полуосью, и одинаков для всех эллипсов с одинаковой длиной большой полуоси. Следовательно, время падения t_1 с расстояния R в притягивающий центр будет равно половине периода

обращения T_c вокруг этого же центра по круговой орбите радиуса $R_c = \dfrac{R}{2}$. Последний вычислить не составляет труда. Из закона Ньютона следует уравнение

$$G\frac{mM}{R_c^2} = \frac{mv^2}{R_c} = \frac{m\left(2\pi R_c\right)^2}{R_c T_c^2},$$

которое и позволяет найти время падения

$$t_1 = \frac{T_c}{2} = \pi\sqrt{\frac{R_c^3}{GM}} \approx 1\cdot 10^{14}\, c \approx 4\cdot 10^{6}\, лет.$$

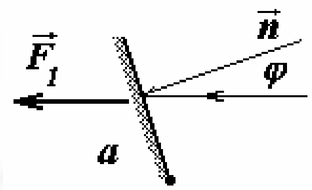
По космическим масштабам 4 миллиона лет, не такой уж и большой промежуток времени.

Задача 3.

Первая часть данной задачи широко известна, поэтому ее решение приведем конспективно.

1. Сила давление света на зачерненную сторону лепестка при нормальном падении $F_1 = \dfrac{I_0}{c}a^2 = 0{,}40\cdot 10^{-9}\, H$, на зеркальную сторону в два раза больше

$F_2 = 2\dfrac{I_0}{c}a^2 = 0{,}80\cdot 10^{-9}\, H$.

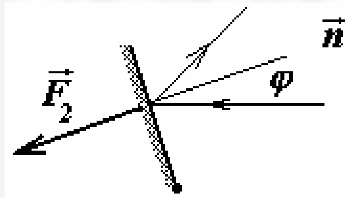


2. При повороте лепестков на угол φ сила давления уменьшается, так уменьшается количество света, падающего на лепесток. На зачерненную поверхность сила давления равна

$$F_1 = \frac{I_0}{c}a^2 \cos\varphi \qquad (1)$$

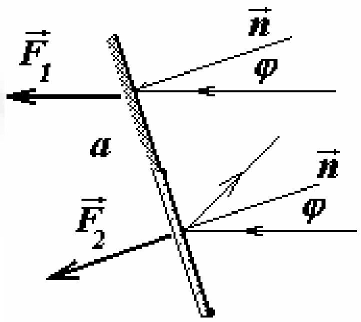
и направлена по направлению падающего света. При падении света на зеркальную поверхность сила направлена перпендикулярно пластинке и равна

$$F_2 = 2\frac{I_0}{c}a^2 \cos\varphi. \qquad (2)$$



3. Так как силы светового давления равномерно распределены по поверхности пластинки, то для вычисления их момента можно считать, что суммарная сила приложена к центру пластинки. Плечо силы, действующий на зачерненную сторону равен $\dfrac{a}{2}\cos\varphi$, ее момент (положительный)

$$M_1 = \frac{I_0}{c}a^2\cos\varphi\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{I_0}{2c}a^3\cos^2\varphi. \qquad (3)$$



Плечо силы, действующей на зеркальную поверхность равно $\dfrac{a}{2}$, следовательно ее момент (отрицательный)

$$M_2 = 2\frac{I_0}{c}a^2\cos\varphi\cdot\frac{a}{2} = \frac{I_0}{c}a^3\cos\varphi. \qquad (4)$$

Суммарный момент сил, действующий на вертушку равен