обращения T_c вокруг этого же центра по круговой орбите радиуса $R_c = \dfrac{R}{2}$. Последний вычислить не составляет труда. Из закона Ньютона следует уравнение

$$G\frac{mM}{R_c^2} = \frac{mv^2}{R_c} = \frac{m\left(2\pi R_c\right)^2}{R_c T_c^2},$$

которое и позволяет найти время падения

$$t_1 = \frac{T_c}{2} = \pi\sqrt{\frac{R_c^3}{GM}} \approx 1\cdot 10^{14}\,c \approx 4\cdot 10^{6}\,лет.$$

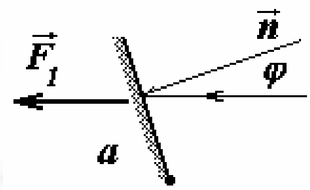
По космическим масштабам 4 миллиона лет, не такой уж и большой промежуток времени.

Задача 3.

Первая часть данной задачи широко известна, поэтому ее решение приведем конспективно.

1. Сила давление света на зачерненную сторону лепестка при нормальном падении $F_1 = \dfrac{I_0}{c}a^2 = 0{,}40\cdot 10^{-9}\,H$, на зеркальную сторону в два раза больше

$F_2 = 2\dfrac{I_0}{c}a^2 = 0{,}80\cdot 10^{-9}\,H$.

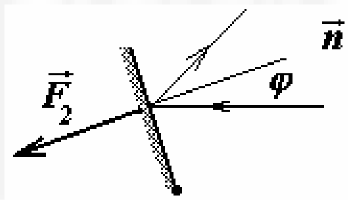


2. При повороте лепестков на угол φ сила давления уменьшается, так уменьшается количество света, падающего на лепесток. На зачерненную поверхность сила давления равна

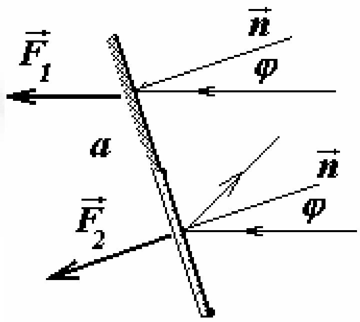
$$F_1 = \frac{I_0}{c}a^2\cos\varphi \qquad (1)$$

и направлена по направлению падающего света. При падении света на зеркальную поверхность сила направлена перпендикулярно пластинке и равна

$$F_2 = 2\frac{I_0}{c}a^2\cos\varphi. \qquad (2)$$



3. Так как силы светового давления равномерно распределены по поверхности пластинки, то для вычисления их момента можно считать, что суммарная сила приложена к центру пластинки. Плечо силы, действующий на зачерненную сторону равен $\dfrac{a}{2}\cos\varphi$, ее момент (положительный)



$$M_1 = \frac{I_0}{c}a^2\cos\varphi\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{I_0}{2c}a^3\cos^2\varphi. \qquad (3)$$

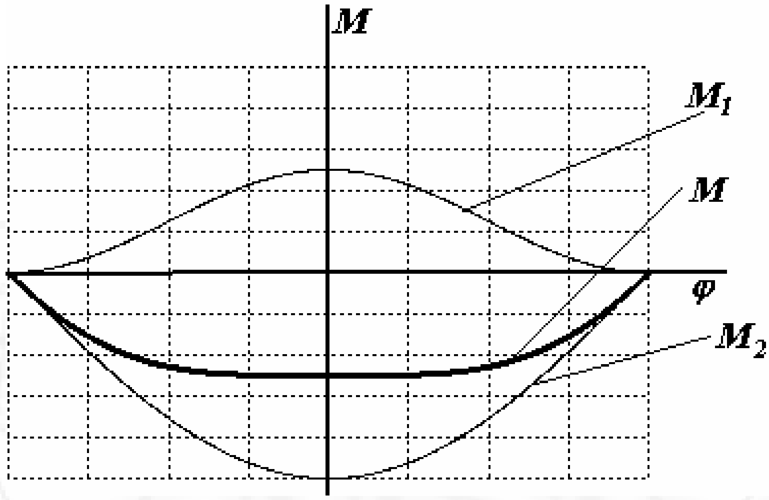
Плечо силы, действующей на зеркальную поверхность равно $\dfrac{a}{2}$, следовательно ее момент (отрицательный)

$$M_2 = 2\frac{I_0}{c}a^2\cos\varphi\cdot\frac{a}{2} = \frac{I_0}{c}a^3\cos\varphi. \qquad (4)$$

Суммарный момент сил, действующий на вертушку равен

$$M = M_1 - M_2 = \frac{I_0}{2c} a^3 \left(cos^2 \varphi - 2 cos \varphi \right) \qquad (5)$$

Для дальнейших расчетов заметим, что при повороте на пол оборота зеркальная и зачерненная стороны лепестков меняются местами, поэтому достаточно рассмотреть диапазон изменения угла в пределах $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right)$. Графики зависимостей моментов сил от угла поворота показаны на рисунке.



Таким образом, при любом положении лепестка момент сил светового давления отрицательный, то есть вертушка должна вращаться черной стороной вперед.
Для вычисления среднего момента сил проведем усреднение угловой зависимости

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos^2 \varphi - 2 cos \varphi \right) d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \approx 0{,}77$$

Таким образом, средний момент силы равен

$$\langle M \rangle = 0{,}77 \frac{I_0}{2c} a^3 \approx 1{,}5 \cdot 10^{-12}\ H \cdot м \qquad (5)$$

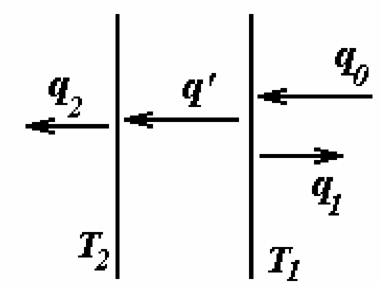
4. Плотность потока теплоты, при повороте лепестка на угол φ равен $q = I_0 \, cos \varphi$, его среднее значение $q_0 = \frac{2}{\pi} I_0$.

5. В единицу времени на площадку единичной площади попадают $\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$ молекул. В среднем каждая молекула переносит энергию $\langle E_0 \rangle = \frac{3}{2} k T_0$, а уносит $\langle E \rangle = \frac{3}{2} k T$. Поэтому энергия, которая уносится газом с единицы площади в единицу времени равен

$$q = \nu \Delta \langle E \rangle = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \frac{3}{2} k \left(T - T_0 \right). \qquad (6)$$

Следовательно, коэффициент теплоотдачи равен

$$\beta = \frac{1}{4} n\langle v\rangle \cdot \frac{3}{2} k = \frac{3}{8}\frac{p}{T_0}\sqrt{\frac{8RT_0}{\pi\mu}} \approx 80 \frac{Bm}{м^2 \cdot K}.$$



6. Обозначим температуру зачерненной стороны T_1, а температуру зеркальной T_2. Тогда в установившемся режиме поток теплоты, падающий на пластику (свет) q_0, должен быть равен сумме потоков теплоты уносимых с зачерненной q_1 и зеркальной q_2 сторон $q_0 = q_1 + q_2$, или

$$q_0 = \beta\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right). \qquad (7)$$

Кроме того, поток теплоты через пластинку q' равен потоку, q_2:

$$\beta\left(T_2 - T_0\right) = \gamma \frac{T_1 - T_2}{h}. \qquad (8)$$

Эти два уравнения позволяют найти температуры сторон. Так разность температур зачерненной и зеркальной сторон

$$T_1 - T_2 = \frac{q_0}{\beta + 2\frac{\gamma}{h}} = \frac{2}{\pi}\frac{q_0}{\beta + 2\frac{\gamma}{h}} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-3} K.$$

Температуру пластинки можно найти из условия равенства потоков падающей и уносимой газом теплоты $q_0 = 2\beta\left(T - T_0\right)$, откуда

$$T = T_0 + \frac{q_0}{2\beta} \approx 300K. \qquad (9)$$

7. Разность давлений можно оценить, считая по-прежнему, что молекулы отраженные поверхностью имеют распределение скоростей, соответствующее температуре поверхности. Поэтому импульс, переданный пластинке при одном ударе молекулы $\Delta p' = m\left(v_{n0} + v_n\right)$, где v_{n0}, v_n - нормальные компоненты скоростей молекул до удара и после удара. Суммарное давление можно получить, умножив полученное значение импульса на среднее число ударов. Разность давлений можно определяется разностью средних скоростей молекул, отраженных от разных сторон лепестков, а эти скорости пропорциональны корню квадратному из температуры, поэтому

$$\Delta P = \nu m\left(v_{n1} - v_{n2}\right) = \frac{p}{\sqrt{T}}\left(\sqrt{T + \Delta T} - \sqrt{T}\right)$$

Учитывая, что разность температур сторон лепестков мала, последнее выражение можно упростить

$$\Delta P = \frac{p}{\sqrt{T}}\left(\sqrt{T + \Delta T} - \sqrt{T}\right) \approx p\frac{\Delta T}{2T} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}\, Па.$$

Силы давления газа направлены перпендикулярно поверхности, поэтому момент сил, действующих на вертушку со стороны газа равен

$$M = 2\Delta P \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \Delta P \cdot a^3 \approx 1{,}6 \cdot 10^{-10}\, H \cdot м$$

Что на два порядка превышает момент сил давления газа.

8. Для оценки момента сил светового давления $\langle M\rangle \approx \frac{I_0}{2c} a^3$.

Момент сил давления газа также может быть оценен достаточно быстро:

аргументация для вывода разности давлений была приведена ранее $\Delta P \approx p\dfrac{\Delta T}{2T}$;

оценка разности температур $\Delta T \approx \dfrac{2I_0 h}{\gamma}$ следует из таких рассуждений:

приблизительно половина потока теплоты, падающего на пластинку, должна быть перенесена на ее противоположную сторону.

Таким образом $M_{газа} \approx \dfrac{I_0 hPa^3}{T\gamma}$, а их отношение $\dfrac{M_{св}}{M_{газа}} \approx \dfrac{\gamma T}{2chP}$.

Следовательно, давление газа в сосуде должно быть меньше, чем (из условия $M_{св} \approx M_{газа}$) $P \approx \dfrac{\gamma T}{2ch} \approx 0{,}1 Па$.

Задача 4.

В данном случае сфотографированы интерференционные полосы, возникающие при интерференции волн, отраженных от нижней грани верхней пластики и верхней грани нижней пластинки.

Разность хода между этими волнами

$$\delta l = 2h + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где h - величина зазора между пластинками в точке с координатой x. Учитывая малость угла, можно записать

$h = x\varepsilon$. Переход от одной интерференционной полосы к другой соответствует изменению разности хода на длину волны. Поэтому ширина интерференционной полосы выражается формулой $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon}$.

Легко подсчитать, что на одном сантиметре $(L = 1{,}0 см)$ укладывается $N = 15$ полос, поэтому ширина интерференционной полосы равна $\Delta x = \dfrac{L}{N}$.

Следовательно, длина волны падающего света

$$\lambda = 2\varepsilon\frac{L}{N} \approx 580 нм. \qquad (2)$$

2. Видно, что в левой части интерференционные полосы сгущаются, выгибаясь влево, следовательно, здесь разность хода увеличивается по сравнению с плоской поверхностью (то есть здесь на пластинке впадина).

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что правым кольцам соответствует выступ. Примерный профиль показан на рисунке. Левая впадина находится в месте, соответствующему 16 интерференционной полосе для плоских пластинок, на максимальной глубине находится 38 полоса, следовательно, эта глубина равна $(38-16)\dfrac{\lambda}{2} \approx 6{,}4 мкм$. Максимальному выступу соответствует 19 интерференционная полоса (а на этом месте должна быть 27 полоса), следовательно, высота выступа $(27-19)\dfrac{\lambda}{2} \approx 2{,}3 мкм$.