Для упрощения последнего выражения воспользуемся приближенной формулой, приведенной в условии задачи,

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\lambda v}{C_0\left(l - \eta v \tau\right)} = \frac{\lambda v}{C_0 l\left(1 - \dfrac{\eta v \tau}{l}\right)} \approx \frac{\lambda v}{C_0 l}\left(1 + \frac{\eta v \tau}{l}\right) = \frac{\lambda v}{C_0 l} + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_0 l^2}\tau . \qquad (5)$$

Таким образом, скорость изменения температуры линейно зависит от времени. Эта зависимость полностью аналогична зависимости скорости движения при равноускоренном движении. Используя эту математическую аналогию, можем записать закон изменения температуры со временем

$$t = t_0 + \frac{\lambda v}{C_0 l}\tau + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_0 l^2}\cdot\frac{\tau^2}{2} . \qquad (6)$$

Еще раз отметим, что нелинейная (квадратичная) зависимость температуры от времени связана с изменением теплоемкости системы.

Максимальная температура может быть определена из последнего выражения, полагая в нем $\tau = \dfrac{l}{v}$,

$$t_{max} = t_0 + \frac{\lambda}{C_0}\left(1 + \frac{\eta}{2}\right). \qquad (7)$$

Задача 4.

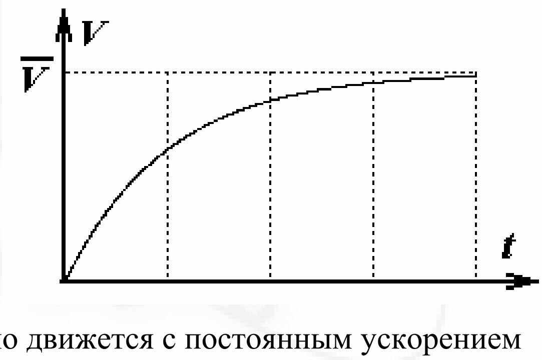
1. Уравнение второго закона Ньютона для движения в вязкой среде имеет в данном случае вид

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = F_0 - \beta_1 v . \qquad (1)$$

Из этого уравнения следует, что ускорение изменяется с течением времени, причем с ростом скорости ускорение уменьшается. При достижении равенства силы сопротивления и силы F_0, ускорение обращается в нуль. Следовательно, скорость установившегося движения $\bar{V}$ определяется соотношением

$$\bar{V} = \frac{F_0}{\beta_1} . \qquad (2)$$

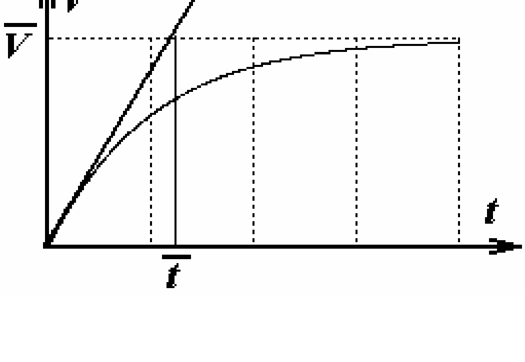
Качественный вид зависимости скорости от времени показан на рисунке.



Для оценки времени достижения установившейся скорости, положим, что тело движется с постоянным ускорением (равным ускорению в начальный момент времени $a_0 = \dfrac{F_2}{m}$) до тех пор, пока скорость не достигнет значения (2):

$$\bar{t} = \frac{\bar{V}}{a_0} = \frac{m}{\beta_1} . \qquad (3)$$

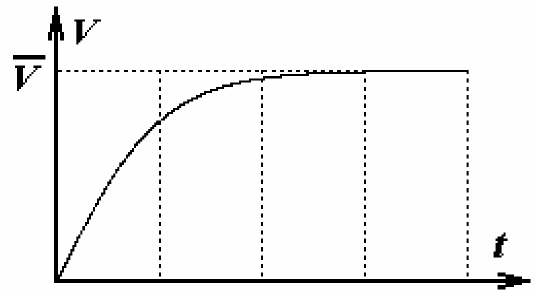
Этот способ получения оценки проиллюстрирован на следующем рисунке.



Отметим, что рассматриваемая зависимость точно описывается функцией $v = \frac{F_0}{\beta_1}\left(1 - exp\left(-\beta_1 t\right)\right)$.

2. Рассмотрение этой части задачи полностью аналогично предыдущей:
- уравнение движения

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = F_0 - \beta_2 v^2 ; \qquad (4)$$



- скорость установившегося движения

$$\overline{V} = \sqrt{\frac{F_0}{\beta_2}} . \qquad (5)$$

- графика зависимости скорости от времени качественно не отличается от рассмотренного ранее;
- время достижения установившейся скорости (обратите внимание - в этом случае это время зависит от действующей силы)

$$\bar{t} = \frac{\overline{V}}{a_0} = \frac{m}{\sqrt{F_0 \beta_2}} . \qquad (6)$$

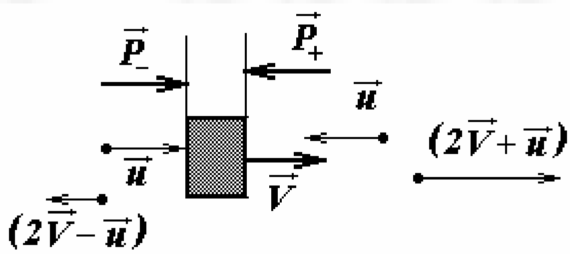
Отметим, что в данном зависимость скорости от времени точно описывается функцией

$$v = \sqrt{\frac{F_0}{\beta_2}} \cdot \frac{1 - exp(t - \alpha t)}{1 + exp(-\alpha t)}, \text{ где } \alpha = 2\frac{\sqrt{F_0 \beta_2}}{m} .$$

3. Сила сопротивления возникает из-за столкновений поршня с движущимися частицами, которые сообщают поршню импульс.

Рассмотрим случай малой скорости поршня $V < u$. О переднюю грань поршня ударятся частицы, которые движутся навстречу поршню, число этих столкновений за промежуток времени Δt рассчитывается по формуле

$$\nu_+ = \frac{1}{2} nS(V + u)\Delta t . \qquad (7)$$



В результате столкновения проекция скорость частицы на направление движения поршня изменяется от $-u$ до $(u + 2V)$ - это утверждение легко доказать перейдя в систему отсчета, связанную с поршнем. Итак, в результате одного столкновения поршень получит импульс

$$p = m(u + 2V + u) = 2m(u + V) . \qquad (8)$$

Следовательно, полный импульс, полученный передней гранью поршня, равен

$$P_+ = \nu_+ p = mnS(u + V)^2 \Delta t . \qquad (9)$$

Аналогично, можно подсчитать импульс, который получит поршень, от частиц, которые ударяются о заднюю грань поршня (разумеется, это частицы, догоняющие поршень)

$$P_- = mnS(u - V)^2 \Delta t . \qquad (10)$$

Таким образом, полный импульс, полученный поршнем равен разности

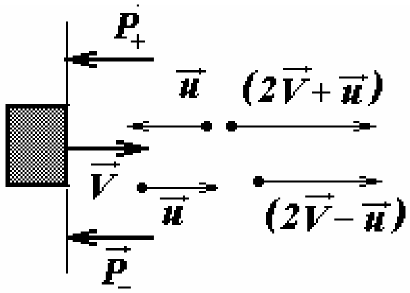
$$P = P_+ - P_- = mnS\Delta t\left((u+V)^2 - (u-V)^2\right) = 4mnS\Delta tuV\,. \qquad (11)$$

Учитывая, что действующая сила равна импульсу, полученному в единицу времени, получим выражение для силы сопротивления

$$F_{con\,p.} = \frac{P}{\Delta} = 4mnSuV\,. \qquad (12)$$

Как видно, в рассмотренной модели сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения поршня.

В случае больших скоростей $V > u$, следует учесть, что передняя грань поршня будет сталкиваться не только с частицами, которые движутся ему навстречу, но и частицами движущимися в том же направлении, что и поршень (который их догоняет). Столкновений же с задней гранью не будет. В остальном же расчет переданного импульса остается прежним и приводит к результату



$$P = P_+ + P_- = mnS\Delta t\left((u+V)^2 + (u-V)^2\right) = 2mnS\Delta t\left(u^2 + V^2\right). \qquad (13)$$

А сила сопротивления в этом случае равна

$$F_{con\,p.} = 2mnS\left(u^2 + V^2\right) \qquad (14)$$

и зависит от квадрата скорости.

Заметим, что молекулы реальных газов имеют различные скорости, поэтому указать для них точную границу между «малой» и «большой» скоростью невозможно.

График зависимости силы сопротивления от скорости представляет собой участок прямой и соприкасающуюся с ней параболу.