10 класс.

Задание 1. **«Повторим физику»**

Хотя на первый взгляд задания кажутся не связанными между собой, поскольку представляют разные разделы физики, однако их решение основано на одинаковой «математике». Ее можно условно назвать «уравнением неразрывности», требующим сохранения некоторой физической величины (в оригинале расхода воды) по всем поперечным сечениям потока

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 .$$

§1 Из условия задачи следует соотношение для скоростей автомобиля на различных участках дороги

$$\upsilon_0 = \upsilon_1 \eta_1 = \upsilon_2 \eta_2 , \qquad (1)$$

Время движения находится из очевидного равенства, из которого следует выражение для начальной скорости автомобиля

$$t_2 - t_1 = \frac{l}{\upsilon_0 / \eta_1} + \frac{l}{\upsilon_0 / \eta_2} = (\eta_1 + \eta_2)\frac{l}{\upsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{t_2 - t_1} l . \qquad (2)$$

Искомый график зависимости $t(x)$ представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. На границе раздела плохих участков автомобиль будет в момент времени

$$t^* = t_1 + \frac{l}{V_1} = t_1 + \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\left(t_2 - t_1\right) . \qquad (3)$$

§2. В процессе движения шайбы ее кинетическая энергия убывает под действием силы трения. Согласно теореме о кинетической энергии

$$\Delta E_K = A_{TP} , \qquad (4)$$

можно найти начальную энергию шайбы

$$E_0 = E + mgl(\mu_1 + \mu_2) . \qquad (5)$$

График зависимости кинетической энергии шайбы от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. На границе раздела шероховатых участков энергия шайбы будет равна

$$E^* = E - \mu_2 mgl . \qquad (6)$$

§3. В данном случае должен быть одинаковым поток теплоты вдоль стержня, т.е.

$$\gamma_1 \frac{\Delta t_1}{l} = \gamma_2 \frac{\Delta t_2}{l} , \qquad (7)$$

кроме того, имеем очевидное уравнение

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = t_1 - t_2 . \qquad (8)$$

Решение системы (5)-(6) приводит к результату

$$\Delta t_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}(t_1 - t_2)$$
$$\Delta t_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}(t_1 - t_2) \quad (9)$$

Соответственно для плотности потока теплоты через пластину получим

$$q = \gamma_1 \frac{\Delta t_1}{l} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{t_1 - t_2}{l}. \quad (10)$$

График зависимости температуры пластины от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами . Температура на границе раздела равна

$$t^* = t_1 - \Delta t_1 = t_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}(t_1 - t_2). \quad (11)$$

Это уравнение можно привести к виду совпадающему с формулой (3)

$$t^* = t_1 + \frac{1/\gamma_1}{1/\gamma_1 + 1/\gamma_2}(t_2 - t_1). \quad (12)$$

§4. В данном случае имеем систему уравнений, полученную из граничных условий для напряженности электрического поля и связи между напряженностью и потенциалом

$$E_1 \varepsilon_1 = E_2 \varepsilon_2$$
$$E_1 l + E_2 l = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (13)$$

где E_1 и E_2 — искомые напряженности полей соответственно в первой и второй пластинах. Решение системы (9) приводит к результату

$$E_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$
$$E_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (14)$$

График зависимости потенциала электрического поля внутри пластины от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. Потенциал границы раздела

$$\varphi^* = \varphi_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_1 + \frac{1/\varepsilon_1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2}(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (15)$$

§5. В данном случае значение силы тока в обеих частях пластины должно быть одинаковым, поэтому на основании закона Ома можно записать

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\Delta \varphi_1}{l} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\Delta \varphi_2}{l}. \quad (16)$$

С учетом очевидного равенства

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_2\,, \tag{17}$$

найдем

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}(\varphi_1-\varphi_2) \\ \Delta\varphi_2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\varphi_1-\varphi_2) \end{aligned}\,. \tag{18}$$

Подставляя выражения (13) в равенство (11) находим плотность электрического тока через пластину (сравни с (10))

$$j = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{\rho_1+\rho_2} = \frac{1/\rho_1 \cdot 1/\rho_2}{1/\rho_1 + 1/\rho_2}(\varphi_1-\varphi)\,. \tag{19}$$

Согласно теореме Гаусса для поверхностной плотности заряда σ на границе раздела пластин имеем

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_1 - E_2 = j(\rho_1-\rho_2) = \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\varphi_1-\varphi_2)\,. \tag{20}$$

$$\sigma = \varepsilon_0\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\varphi_1-\varphi_2) \tag{21}$$

График зависимости потенциала электрического поля внутри пластины от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. Потенциал границы раздела рассчитывается по формуле

$$\varphi^* = \varphi_1 + \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}(\varphi_2-\varphi_1) \tag{22}$$

Задание 2. «Удвоение и падение»

Рассмотрим спицу с одним шариком в момент, когда она составляет некоторый угол α с вертикалью. Согласно закону сохранения механической энергии имеем

$$\frac{mV^2}{2} + mgl\cos\alpha = mgl\cos\alpha_0\,, \tag{1}$$

где l — длина спицы, m — масса шарика, V — его скорость в данный момент, α_0 — угол начального отклонения спицы. Из (1), учитывая, что $V=\omega l$ найдем угловую скорость ω_1 спицы в рассматриваемый момент времени

$$\omega_1 = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}\,. \tag{2}$$

Проводя аналогичные рассуждения для случая падения спицы с двумя шариками, получим