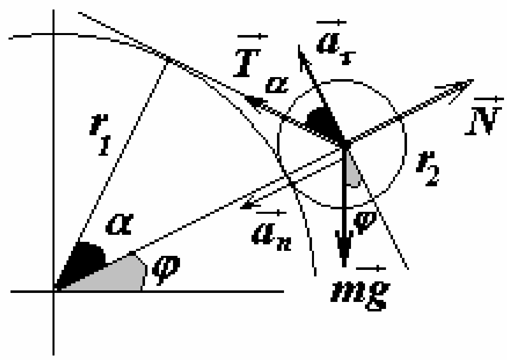
11 класс.

Задача 1. «Шарик на привязи»

Рассмотрим общий случай движения шарика вокруг цилиндра, т.е. движение с угловым ускорением β и в поле тяжести mg. Переход к частным случаям очевиден – либо $\beta \to 0$, либо $mg \to 0$ (либо и то и другое).

Положение шарика будем задавать с помощью угла φ - между горизонталью и отрезком, соединяющим центры вала и шарика. Зададим также угол α между радиусами вала, направленными к точке касания вала и шарика и точке, в которой нить касается поверхности вала (см. рис.). Понятно, что угол α полностью определяется отношением радиусов вала и шарика. Так $\cos\alpha = \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{5}{8}$, или $\alpha \approx 51° \approx 0{,}896\,рад$.



Шарик движется под действием: силы тяжести $m\vec{g}$; силы натяжения нити $\vec{T}$; силы реакции $\vec{N}$.

В общем случае ускорение шарика можно разложить на нормальную

$$a_n = \omega^2(r_1 + r_2) \qquad (1)$$

и тангенциальную составляющие

$$a_\tau = \beta(r_1 + r_2). \qquad (2)$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона

$$m(\vec{a}_n + \vec{a}_\tau) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \qquad (3)$$

в проекциях на радиальное и касательное направления

$$\begin{cases} m\omega^2(r_1 + r_2) = mg\sin\varphi + T\sin\alpha - N \\ m\beta(r_1 + r_2) = -mg\cos\varphi + T\cos\alpha \end{cases}. \qquad (4)$$

При отрыве шарика от поверхности вала сила реакции устремляется к нулю (до этого она должна быть положительной). Выразим из системы уравнений (4) значение силы реакции N:

$$T = \frac{m\beta(r_1 + r_2) + mg\cos\varphi}{\cos\alpha}$$

$$N = \frac{m\beta(r_1 + r_2)\sin\alpha + mg\sin(\varphi + \alpha)}{\cos\alpha} - m\omega^2(r_1 + r_2)$$

Из этого соотношения определим функцию

$$F = \frac{N\cos\alpha}{m} = \beta(r_1 + r_2)\sin\alpha + g\sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha, \qquad (5)$$

знак которой определяет условие отрыва (повторим, отрыв произойдет, когда положительная функция уменьшится до нуля).

1. Когда вал расположен вертикально $(g = 0)$ и начинает вращаться с постоянной $(\beta = 0)$ угловой скоростью функция (5) имеет вид

$$F = -\omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha, \qquad (6)$$

она отрицательна при любых значениях параметров системы. Следовательно, шарик оторвется от поверхности вала сразу после начала движения, т.е. в этом случае $\tau = 0$.

2. Если вал расположен вертикально $(g = 0)$ и начинает вращаться с постоянным угловым ускорением, функция (5) имеет вид

$$F = \beta(r_1 + r_2)\sin\alpha - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha . \qquad (7)$$

Учитывая, что угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = \beta t$, заключаем, что сначала эта функция положительна, а затем обращается в нуль. Следовательно, шарик сначала будет прижат к поверхности вала, а затем оторвется от нее, причем это произойдет в момент времени

$$F = \beta(r_1 + r_2)\sin\alpha - \beta^2\tau^2(r_1 + r_2)\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\tau = \sqrt{\frac{tg\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_1^2}}{\beta r_1}} \approx 0{,}65c \qquad . \qquad (8)$$

3а. Если вал расположен горизонтально, начинает вращаться с постоянной $(\beta = 0)$ угловой скоростью, первоначально нить расположена вертикально (при $t = 0 \quad \varphi = -\alpha$), функция (5) имеет вид

$$F = g\sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha \qquad (9)$$

и в начальный момент времени отрицательна. Следовательно, шарик сразу после начала движения, т.е. при $\tau = 0$.

3б. Если же первоначально нить горизонтальна (при $t = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$), то значение функции (9) при $t = 0$

$$\begin{aligned} F &= g\sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha = \\ &= \left(g - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha\right) \approx 9.4 > 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Поэтому первоначально шарик будет прижат к поверхности вала. Отрыв произойдет, когда эта функция обратится в нуль (причем следует выбрать минимальный положительный корень этой функции), т.е

$$F = g\sin(\omega t + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\left(\pi - \arcsin\dfrac{\omega^2 r_1}{g}\right) - \alpha}{\omega} \approx 0{,}73c$$

4. Наконец, нам необходимо рассматривать полную функцию (5). Вал расположен горизонтально, начинает вращаться с постоянным угловым ускорением, первоначально нить расположена вертикально ($\omega = \beta t$, $\varphi = \frac{\beta t^2}{2} - \alpha$); эта функция имеет вид

$$F = \beta(r_1 + r_2)\sin\alpha + g\sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha . \qquad (11)$$

В начальный момент времени эта функция положительна, следовательно, шарик прижат к поверхности вала, для определения момента отрыва нам необходимо найти минимальный положительный корень этой функции. Аналитическое решение уравнения $F = 0$ невозможно, необходимо использовать приближенные численные методы. Для анализа решения обозначим $\varphi + \alpha = \frac{\beta t^2}{2} = \xi$, тогда $\omega = \beta t = \sqrt{2\beta\xi}$ и перепишем уравнение $F = 0$ в виде

$$\sin\xi = \frac{2\beta(r_1 + r_2)\cos\alpha}{g}\xi - \frac{\beta(r_1 + r_2)\sin\alpha}{g}, \qquad (12)$$

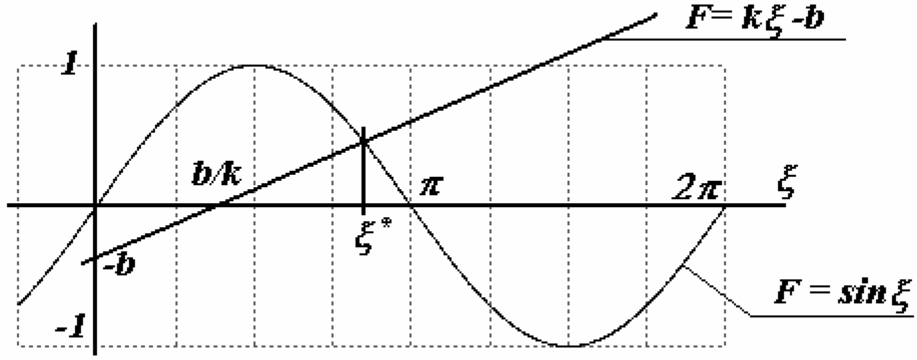
или обозначая постоянные коэффициенты

$k = \dfrac{2\beta(r_1 + r_2)\cos\alpha}{g} \approx 3{,}06 \cdot 10^{-2}$; $b = \dfrac{\beta(r_1 + r_2)\sin\alpha}{g} \approx 1{,}91 \cdot 10^{-2}$, получим уравнение,

которое выглядит достаточно простым,

$$\sin\xi = k\xi - b\,. \qquad (13)$$

Построим схематические графики функций, стоящих в правой и левой частях уравнения (13)

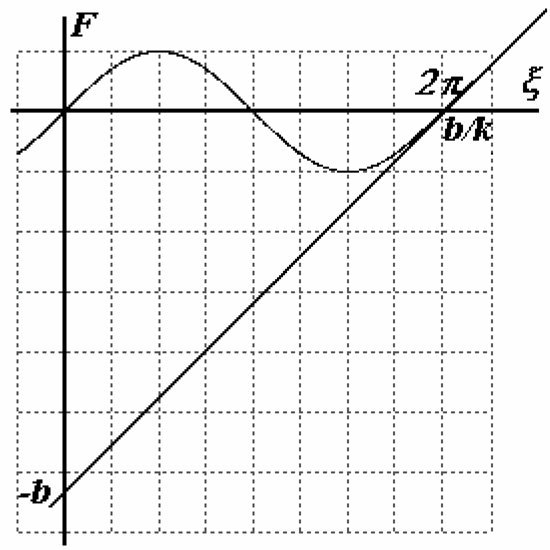


Вид графиков показывает, что уравнение (13) имеет положительный корень при любых параметрах системы. При заданных в условии числовых данных наклон графика линейной зависимости мал, поэтому следует ожидать, что корень уравнения ξ^* близок к π, поэтому это число можно взять в качестве начального приближения корня, которое потом можно уточнить любым методом. В результате получается следующее значение корня

$\xi^* \approx 3{,}067$, соответствующее значение времени отрыва $\xi^* \approx 3{,}067\tau = \sqrt{\dfrac{2\xi^*}{\beta}} \approx 1{,}4c$.

Заметим, что шарик оторвется, совершив чуть меньше, чем пол оборота.

5. Чтобы шарик до отрыва совершил полный оборот необходимо, первый положительный корень уравнения был равен 2π. Изобразим графически такую ситуацию. Как следует из этого рисунка, для реализации описанной ситуации должны выполняться следующие соотношения



$$\frac{b}{k} = 2\pi\,, \qquad (14)$$

в этом случае 2π будет являться корнем уравнения;

$$k \ge 1, \qquad (15)$$

при выполнении этого условия будут отсутствовать меньшие корни.

Используя выражения для коэффициентов, условие (14) и его решение приобретут вид

$$\frac{tg\alpha}{2} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_1^2}}{r_1} = 4\pi \quad \Rightarrow \quad r_2 = \left(\sqrt{16\pi^2 + 1} - 1\right)r_1 \approx 58см$$

Из условия (15) находим

$$k = \frac{2\beta(r_1 + r_2)\cos\alpha}{g} = \frac{2\beta r_1}{g} \ge 1 \quad \Rightarrow \quad \beta \ge \frac{g}{2r_1} \approx 98c^{-2}.$$