Задача 2. «Блики на дне»

Очевидно, что блики на дне возникают благодаря преломлению на изогнутой поверхности воды, при этом «горбы» служат своеобразными собирающими линзами, а впадины – рассеивающими линзами. Следовательно, для описания бликов необходимо рассмотреть ход лучей после преломления на поверхности. Заметим, что волна движется перпендикулярно плоскости падения лучей, поэтому можно изучать ход лучей в одной вертикальной плоскости, совпадающей с направлением распространения волны. Кроме того, можно считать, что лучи падают на поверхность вертикально (точнее, можно принимать во внимание только вертикальные составляющие солнечных лучей).

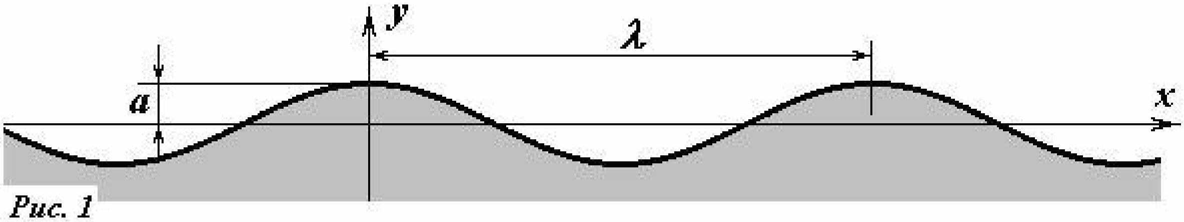

Рис. 1

1. Зададим уравнение профиля волны (рис.1):

$$y = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \qquad (1)$$

2. Пусть в точке A волны с координатой x вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности волны образует с вертикалью угол φ (рис. 2). Найдем зависимость этого угла от координаты. Понятно, что этот угол равен углу, который образует касательная с горизонталью. Как известно, тангенс угла наклона касательной графику функции к оси аргумента равен первой производной от изучаемой функции.

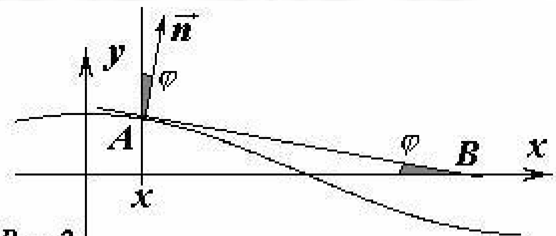

Рис.2

Так как в рассматриваемой задаче длина волны значительно больше ее амплитуды, угол φ можно считать малым, следовательно, здесь и далее тангенс и синус этого угла можно принимать равными самому углу. Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$\varphi(x) = -y' = a\frac{2\pi}{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \qquad (2)$$

Заметим, что максимальное значение этого угла $\varphi_{\max} = a\frac{2\pi}{\lambda} \approx 0{,}3$. При этом погрешности замен синусов и тангенсов на значение самого угла не превышает 4%.

3. Пусть вертикальный луч попадает на поверхность воды в точке A с координатой x. В этой точке вектор нормали направлен под углом φ к вертикали, следовательно, он и является углом падения. Найдем угол α между лучом преломленным и вертикалью (рис.3). Учитывая, что все углы малы и используя закон преломления, найдем угол преломления $\gamma = \frac{\varphi}{n}$, тогда искомый угол можно рассчитать по формуле

$$\alpha = \varphi - \gamma = \frac{n-1}{n}\varphi. \qquad (3)$$

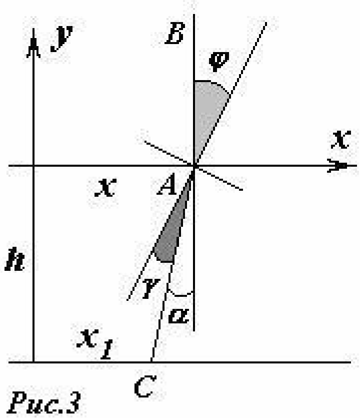

Рис.3

4. Учитывая, что рассматриваемые глубины значительно превышают амплитуду волны, последней можно пренебречь при определении координаты точки падения луча на дно. Как легко заметить (рис.3)

$$x_1 = x - h \cdot tg\alpha \approx x - h\alpha . \qquad (4)$$

5. Запишем функцию зависимости x_1 от x в явном виде

$$x_1 = x - h\frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \qquad (5)$$

Схематические графики этой функции при различных значениях глубины показаны на рис.4 (номера графиков даны в порядке возрастания глубины).

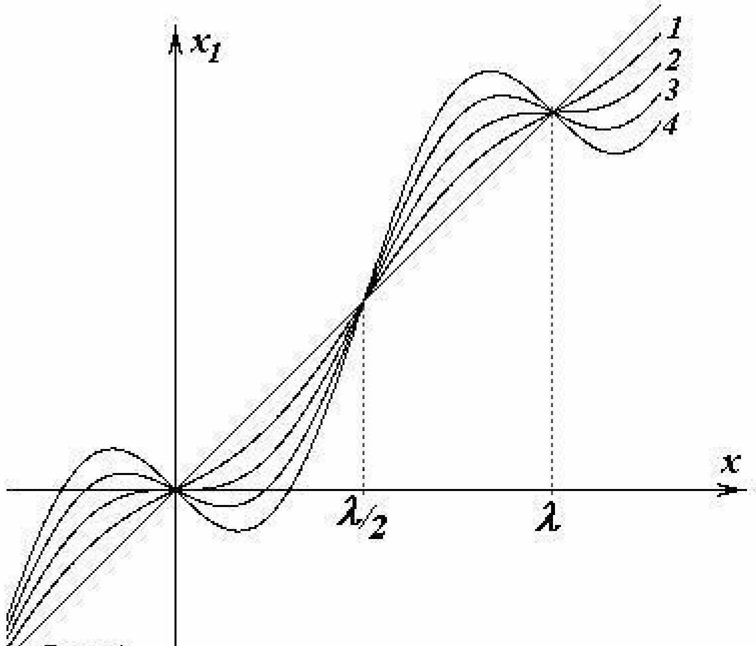

Рис. 4

6. Самой существенной особенностью данных зависимостей является переход от монотонного возрастания к появлению максимумом и минимумов.

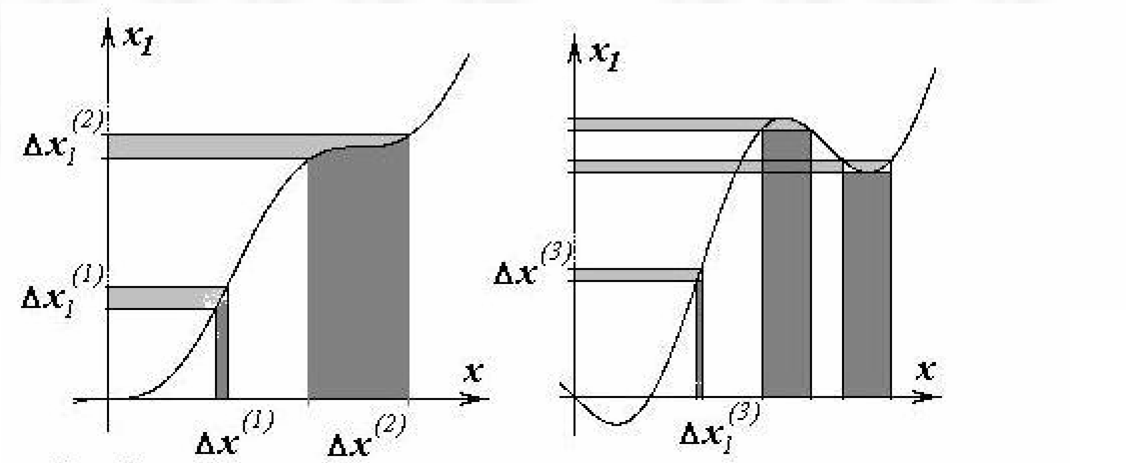

Рис. 5

Действительно, рассмотрим малый интервал (полоску) на дне шириной Δx_1, на нее попадут лучи, которые пересекли поверхность воды в соответствующем интервале Δx.

Понятно, что чем больше Δx, тем больше света попадет на полоску Δx_1 (рис. 5). Поэтому средняя освещенность полоски дна возле точки x_1 пропорциональна отношению $\frac{\Delta x}{\Delta x_1}$.

Поэтому чем более полога зависимость $x_1(x)$ в данной точке, тем ее освещенность больше. Вблизи максимума она становится очень большой, а вблизи точки перегиба еще больше. Поэтому максимум интенсивности будет достигаться на той глубине, где график зависимости $x_1(x)$ будет иметь точки перегиба.

Кстати, на больших глубинах для расчета интенсивности в некоторых точках дна требуется провести суммирование по трем, пяти и большему числу интервалов на поверхности. Не будем заниматься этой работой. Достаточно, что мы получили метод расчета глубины максимальной фокусировки - в зависимости $x_1(x)$ должны появляться точки перегиба. В приближении малых углов эта зависимость имеет вид (5)

Производная от этой функции равна

$$x_1' = 1 - ha\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{n-1}{n}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \qquad (6)$$

При малых глубинах h функция (5) экстремумов не имеет (рис. 5), при h больших некоторого критического значения появляются точки минимумов и максимумов. Это произойдет тогда, когда производная функция (6) будет принимать в некоторых точках нулевые значения. Иными словами, когда уравнение $x_1' = 0$ имеет корни, в зависимости $x_1(x)$ появляются экстремумы - граничное значение между этими двумя случаями - точки перегиба. Итак, условие фокусировки получает абстрактную математическую формулировку - у функции (6) появляются нули!

Как следует из анализа функции (5) если первая производная равна нулю при $x = x_1 = 0$, эта точка будет точкой перегиба, то есть именно в этом случае яркость полосок будет максимальна. Для определения этой «оптимальной» глубины необходимо решить простейшее уравнение

$$1 - ha\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} = 0, \qquad (7)$$

из которого находим глубину «фокусировки»

$$h_0 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{n}{a(n-1)} \approx 2{,}0\,м. \qquad (8)$$

Альтернативный способ.

Рассмотрим фокусировку лучей, попадающих в малую область вблизи максимума волны. Для этого будем считать в функции (5) x малым, тогда эта функция упрощается

$$x_1 = x - h\frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \approx \left(1 - ha\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{n-1}{n}\right)x. \qquad (9)$$

Далее замечаем, что если коэффициент в скобках обращается в нуль, то все падающие лучи собираются в точке $x_1 = 0$, то есть фокусируются. Из этого непосредственно следует выражение (8).

8. Глубина водоема $h = 0{,}5\,м$ является малой по сравнению с найденной глубиной фокусировки. Поэтому в этом случае функция (5) экстремумов не имеет, поэтому, как было отмечено ранее, освещенность дна пропорциональна $\frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{1}{x_1'}$, и может быть записана в виде

$$I = \frac{I_0}{1 - ha\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{n-1}{n}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)}. \qquad (10)$$

Строго говоря, в это выражение следует подставить x как функцию x_1, выраженную из функции (5). Однако, учитывая малость углов отклонения лучей от вертикали, малость глубины, для построения схематического графика можно положить $x_1 \approx x$. Требуемый график показан на рис. 6.

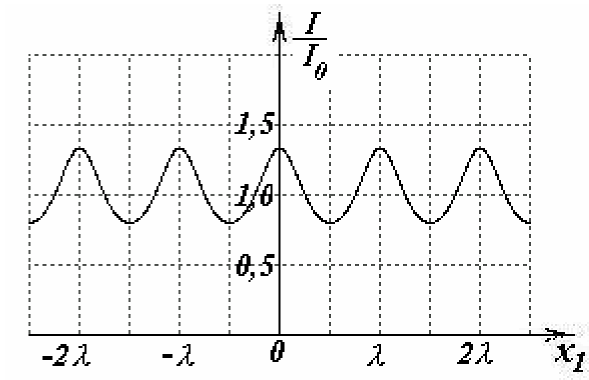

Рис.6

9. При глубине озера $h = 2{,}5 м$ функция (5) имеет достаточно близко расположенные максимумы и минимумы. Следовательно, на этой глубине каждая яркая полоса «раздваивается», так как каждому минимуму и максимуму соответствует резкое увеличение освещенности. Схематически структура пучка показана на рис.7.

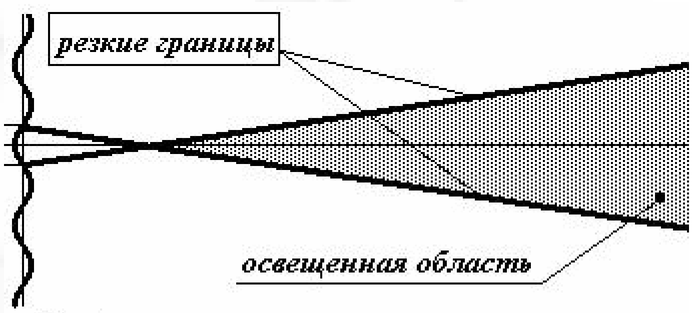

Рис.7

Для определения положения максимума освещенности x_1 на дне необходимо решить систему уравнений (5) – (6). Из условия обращения производной (6) в нуль находим

$$1 - ha\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{n-1}{n}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{h_0}{h} \approx \pm 0{,}10 м,$$

Подставляя это значения в функцию (5), находим

$$x_1 = x - h\frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \approx \mp 1{,}7 см.$$

Окончательно, ширина полоски равна $\Delta x_1 = 2x_1 \approx 3{,}5 см$.