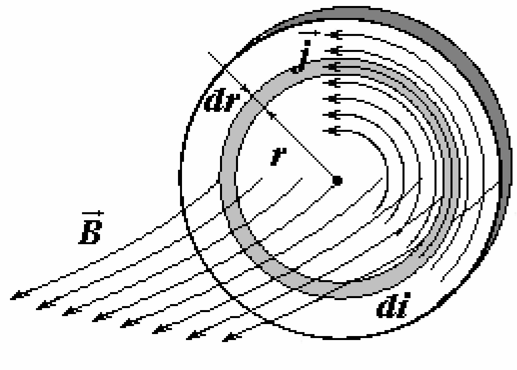
Задача 3. «Побег и погоня»

1. Расчет массы очевиден $m = \gamma V = \pi R^2 h\gamma$.

2. Обсудим физические причины, приводящие в движение монету. При включении тока возникает переменное магнитное поле, которое индуцирует в монете электрические токи, которые в свою очередь, взаимодействуют с магнитным полем. Это взаимодействие приведет к появлению силы Ампера, сообщающей монете ускорение. Так как по условию ток, а, следовательно, и магнитное поле возрастают быстро, то можно пренебречь смещением монеты за время возрастания тока в кабеле. То есть, достаточно рассчитать импульс, который приобретет монета. На основании правила Ленца можно утверждать, что импульс монеты будет направлен от кабеля (чтобы уменьшить возрастание магнитного потока), поэтому дальнейшие расчеты будем проводить без учета знаков, то есть «по модулю». Приступим к расчету скорости монеты.

Строго говоря, магнитное поле в пределах молекулы является неоднородным. Однако, принимая во внимание малые размеры монеты, по сравнению с расстоянием до кабеля, при расчете распределения токов в монете неоднородностью поля пренебрежем. Учитывая осевую симметрию монеты, следует считать, что распределение токов в монете является круговым, причем величина плотности тока зависит расстояния до центра монеты. Выделим в монете тонкое кольцо радиуса r , толщиной dr и найдем силу тока в этом кольце. Магнитный поток через площадь кольца равен



$$\Phi = \pi r^2 B_0 = \pi r^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi l} = \frac{\mu_0 I}{2l} r^2 , \qquad (1)$$

здесь $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}$- индукция магнитного поля в центре монеты, рассчитываемая по известной формуле индукции поля прямого тока.

При изменении силы тока в кабеле, в рассматриваемом кольце возникнет ЭДС индукции, равная по закону Фарадея

$$\mathrm{E}_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I'}{2l} r^2 , \qquad (2)$$

здесь $I' = \frac{dI}{dt}$ - скорость изменения тока в кабеле, кроме того, согласно сделанной ранее оговорке опущен знак минус.

Электрическая проводимость выделенного кольца рассчитывается по известной формуле

$$g = \frac{1}{R_{эл.}} = \frac{hdr}{\rho 2\pi r} , \qquad (3)$$

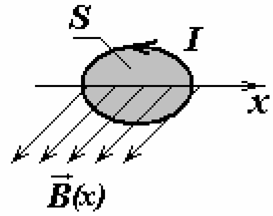
здесь $R_{эл.} = \rho \frac{l}{S}$ - электрическое сопротивление, не путать с радиусом монеты – букв не хватает.

По закону Ома, сила тока в выделенном кольце

$$di = g\mathrm{E}_{ind} = \frac{hdr}{\rho 2\pi r} \cdot \frac{\mu_0 I'}{2l} r^2 = \frac{\mu_0 I' h}{4\pi \rho l} r dr . \qquad (4)$$

Заметим, что в однородном магнитном поле, сила, действующая на контур с током, ориентированный так, как наша монета, равна нулю.

Однако можно показать, что в неоднородном поле появляется сила, которая для малого контура может быть записана в виде



$$F = IS\frac{dB}{dx}, \qquad (5)$$

здесь I, S - сила тока в контуре и его площадь, $\frac{dB}{dx}$ - производная от величины индукции поля по координате, вычисленная в центре контура. В нашем случае

$$\frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi l^2}. \qquad (6)$$

Таким образом, сила, действующая на выделенное кольцо, равна

$$dF = di\cdot\left(\pi r^2\right)\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi l^2} = \frac{\mu_0 I'h}{4\pi\rho l}rdr\cdot\pi r^2\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi x^2} = \frac{\mu_0^2 II'h}{8\pi\rho l^3}r^3dr. \qquad (7)$$

Проинтегрировав по всему кольцу, получим выражение, для полной силы, действующей на монету

$$F = \frac{\mu_0^2 II'h}{8\pi\rho l^3}\int_0^R r^3dr = \frac{\mu_0^2 II'h}{8\pi\rho l^3}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\mu_0^2 II'hR^4}{32\pi\rho l^3} \qquad (8)$$

По второму закону Ньютона изменение импульса тела, равно импульсу силы, который в данном случае можно вычислить, даже не зная явного вида зависимости силы тока в кабеле от времени

$$mV = \int Fdt = \frac{\mu_0^2 hR^4}{32\pi\rho l^3}\int II'dt = \frac{\mu_0^2 hR^4}{32\pi\rho l^3}\int I\frac{dI}{dt}dt = \frac{\mu_0^2 hR^4}{32\pi\rho l^3}\int IdI = \frac{\mu_0^2 hR^4}{32\pi\rho l^3}\cdot\frac{I_0^2}{4} = \frac{\mu_0^2 hR^4 I_0^2}{128\pi\rho l^3}. \quad (9)$$

Наконец, используя выражение для массы, получим выражение для скорости монеты

$$V_0 = \frac{\mu_0^2 hR^4 I_0^2}{128\pi\rho l^3}\cdot\frac{1}{\pi R^2 h\gamma} = \frac{\mu_0^2 R^2 I_0^2}{128\pi^2\rho l^3\gamma}. \qquad (10)$$

3. При движении монеты в стационарном поле также будет возникать ЭДС индукции и как следствие электрические токи, в этом случае за счет неоднородности магнитного поля. Следовательно, на катящуюся монету будет действовать тормозящая сила, часто называемая «магнитной вязкостью». Направление этой силы, противоположное скорости также можно обосновать правилом Ленца. Для расчета этой силы применим «энергетический» подход - работа (и мощность) тормозящей силы равна количеству (мощности) выделяемой в монете джоулевой теплоты. Таким образом, нам необходимо рассчитать мощность выделяющейся теплоты. Еще раз отметим, что ЭДС индукции возникает вследствие движения монеты в неоднородном поле, в остальном же расчет токов остается прежним, поэтому проведем его без подробных комментариев.

Магнитный поток через выделенное кольцо

$$\Phi = \pi r^2 B(x) = \pi r^2\frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_0}{2x}r^2. \qquad (11)$$

ЭДС индукции в кольце

$$\mathrm{E}_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x}\right) = -\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x^2}\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x^2}V \ . \tag{12}$$

Мощность джоулевой теплоты, выделяющейся в кольце

$$dP = g\mathrm{E}_{ind}^2 = \frac{hdr}{2\pi r\rho}\cdot\left(\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x^2}V\right)^2 = \frac{\mu_0^2 I_0^2 h}{8\pi\rho x^4}V^2 r^3 dr \ . \tag{13}$$

После интегрирования по всей плоскости монеты получим полную мощность

$$P = \frac{\mu_0^2 I_0^2 h}{8\pi\rho x^4}V^2\int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0^2 I_0^2 hR^4}{32\pi\rho x^4}V^2 , \tag{14}$$

которую приравняем к мощности силы $P = FV$, и найдем явное выражение для этой силы

$$F = \frac{\mu_0^2 I_0^2 hR^4}{32\pi\rho x^4}V \ . \tag{15}$$

Как следует из этой формулы, тормозящая сила пропорциональна скорости и зависит от координаты кольца. Запишем уравнение второго закона Ньютона для движущегося кольца

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{C}{x^4}V , \tag{16}$$

где обозначено $C = \dfrac{\mu_0^2 I_0^2 hR^4}{32\pi\rho}$ - постоянный коэффициент. Так как нас интересует только конечное положение кольца (когда его скорость станет равной нулю), можем преобразовать уравнение (16), избавившись в нем от времени:

$$m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = m\frac{dV}{dx}V = -\frac{C}{x^4}V \quad\Rightarrow\quad m\frac{dV}{dx} = -\frac{C}{x^4} \quad . \tag{17}$$

Последнее же уравнение может быть легко проинтегрировано с учетом начальных и конечных условий

$$mdV = -C\frac{dx}{x^3} \quad\Rightarrow\quad -mV_0 = -C\int_l^L \frac{dx}{x^4} = -C\left(\frac{1}{l^3} - \frac{1}{L^3}\right). \tag{18}$$

Подставляя значения константы и начальной скорости, из уравнения (18) находим конечное положение монеты $L = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\cdot l$ и путь пройденный ею

$$\Delta x = L - l = \left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - 1\right)l \tag{19}$$

Подстановка численного значения начального расстояния приводит к результату $\Delta x \approx 5{,}0\,см$.