$$x = \sqrt{\frac{2h_0\beta g}{\eta}t}\,. \qquad (5)$$

Запишем условие сохранения количества воды

$$\rho h + \eta\rho x = \rho h_0\,, \qquad (6)$$

которое позволяет найти искомую зависимость толщины слоя не впитавшейся воды от времени

$$h = h_0 - \sqrt{2h_0\beta g\eta t}\,. \qquad (7)$$

Полагая $h = 0$, найдем время впитывания

$$T = \frac{h_0}{2\beta\eta g}, \qquad (8)$$

3. Так как скорость движения жидкости внутри песка не зависит от его толщины, то после полного впитывания верхняя граница «мокрого» слоя будет постоянна и определяться формулой (3). Следовательно, вся вода пройдет через слой песка за время

$$T = \frac{h_0}{2\beta\eta g} + \frac{h_1}{\beta g}\,. \qquad (9)$$

Задание 10.2

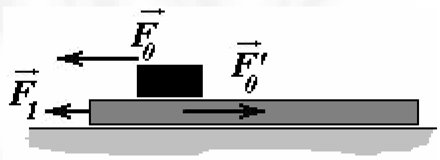
Будем рассматривать движение по этапам. Все кинематические характеристики, относящиеся к ящику, будем нумеровать индексом 0, а, относящиеся к салазкам – индексом 1, координатами салазок будем считать координату их задней части.

1. Разгон ящика описывается хорошо известными уравнениями:

$$\begin{cases} v_0 = a_0 t \\ x_0 = \dfrac{a_0 t^2}{2} \end{cases}. \qquad (1)$$

Этот разгон закончится в момент времени $t_1 = \sqrt{\dfrac{2l_0}{a_0}} \approx 2{,}00c$, ящик будет иметь

скорость $v_{01} = \sqrt{2a_0 l_0} \approx 6{,}00\dfrac{м}{c}$.



2. Разгон салазок. После того, как ящик окажется на салазках, начнется их разгон под действием силы трения со стороны ящика. Рассмотрев действующие силы трения между ящиком и салазками $F_0 = F_0' = \mu_0 m_0 g$;

между салазками и льдом $F_1 = \mu_1(m_0 + m_1)g$,

определим ускорения салазок и ящика

$$a_{01} = -\mu_0 g \approx -3{,}0\frac{м}{c^2}, \qquad a_{11} = \frac{\mu_0 m_0 - \mu_1(m_0 + m_1)}{m_1}g \approx 5{,}4\frac{м}{c^2}.$$

Зависимости скоростей и координат движущихся тел определяются уравнениями (для сокращения записей сместим начало отсчета времени)

$$\begin{cases} v_0 = v_{01} + a_{01}t \\ v_1 = a_{11}t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 = l_0 + v_{01}t + \dfrac{a_{01}t^2}{2} \\ x_1 = l_0 + \dfrac{a_{11}t^2}{2} \end{cases}. \qquad (2)$$

Далее следует заметить, что такое движение будет происходить пока скорости салазок и ящика не сравняются, Это произойдет через время $t_2 = \dfrac{v_{01}}{a_{11} + |a_{01}|} \approx 0{,}714c$.

До этого момента времени доска сместится на $\Delta x_{11} \approx 1{,}38 м$, а ящик на $\Delta x_{01} \approx 3{,}52 м$. Так как $\Delta x_{01} - \Delta x_{11} < L$ (до конца салазок остается $\Delta L = L - (\Delta x_{01} - \Delta x_{01}) \approx 0{,}86 м$), то ящик останется на салазках. В момент прекращения относительного движения ящика по салазкам их скорость будет равна $v_{02} \approx 3{,}85 \frac{м}{с}$.

3. Торможение. Далее салазки с неподвижным ящиком будут двигаться вместе с ускорением $a_2 = -\mu_1 g \approx -0{,}20 \frac{м}{с^2}$. До полной остановки салазки могут пройти по льду путь $S = \frac{v_{02}^2}{2|a_2|} \approx 37{,}25 м$, что больше оставшегося расстояния до противоположного берега. На этом участке скорости и координаты будут изменяться по законам

$$\begin{cases} v_0 = v_{02} + a_2 t \\ v_1 = v_{02} + a_2 t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 = l_0 + \Delta x_{01} + v_{02} t + \dfrac{a_2 t^2}{2} \\ x_1 = l_0 + \Delta x_{11} + v_{02} t + \dfrac{a_2 t^2}{2} \end{cases}. \tag{3}$$

До противоположного берега салазкам остается пройти расстояние $l = l_1 - L - \Delta x_{11} \approx 25{,}6 м$. Салазки подъедут к берегу со скоростью, которую можно рассчитать по формуле $v_{03} = \sqrt{v_{02}^2 - 2|a_2| l} \approx 2{,}14 \frac{м}{с}$. Это произойдет через время

$$\Delta t_2 = \frac{v_{03} - v_{02}}{a_2} \approx 8{,}55 с$$

4. Торможение по салазкам. После того, как салазки «упрутся» в берег, ящик начнет скользить по салазкам с ускорением $a_{03} = -\mu_0 g \approx -2{,}0 \frac{м}{с^2}$. По салазкам они могут пройти путь $S = \frac{v_{03}^2}{2|a_{03}|} \approx 1{,}15 м$, что больше, чем расстояние ΔL до конца салазок, поэтому ящик соскользнет с них. Скорость ящика в момент выезда на берег $v_{04} = \sqrt{v_{03}^2 - 2|a_{03}|\Delta L} \approx 1{,}07 \frac{м}{с}$, что произойдет через время $\Delta t_2 = \frac{v_{04} - v_{03}}{a_{03}} \approx 0{,}54 с$.

Законы изменения скорости и координаты ящика на этом этапе имеет вид

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{04} + a_{03} t \\ x_0 &= l_0 + l_1 - \Delta L + v_{04} t + \frac{a_{03} t^2}{2} \end{aligned}. \tag{4}$$

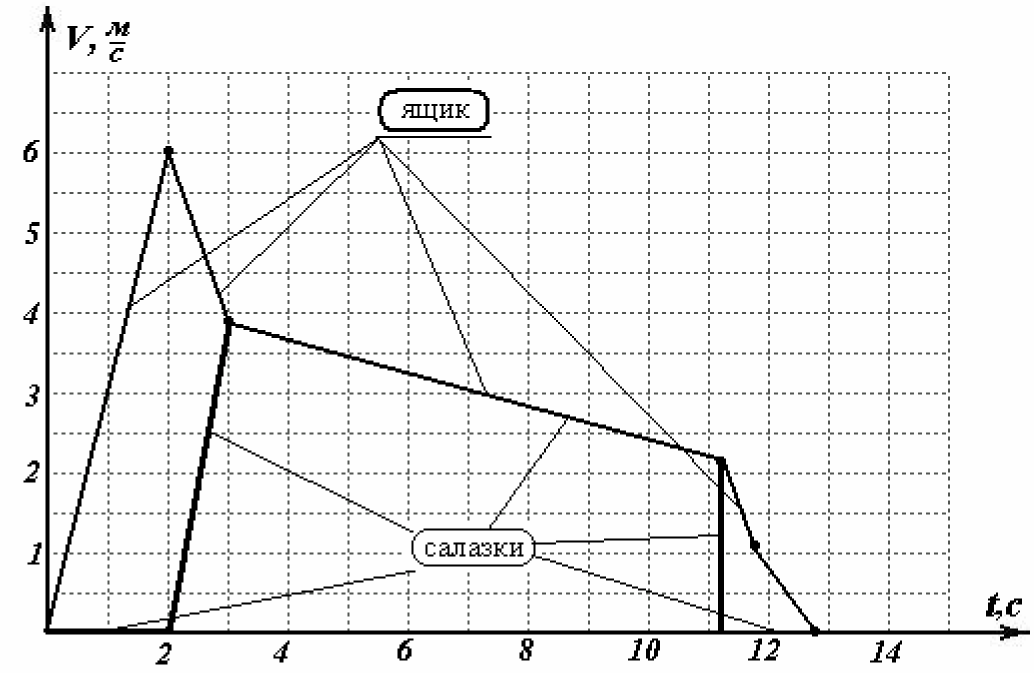
5. Торможение по берегу. Ящик на берегу тормозит с ускорением $a_{04} = -\mu_2 g \approx -1{,}0 \frac{м}{с^2}$.

При этом он пройдет путь $S = \frac{v_{04}^2}{2|a_{04}|} \approx 0{,}57 м$ до остановки за время $\Delta t_5 = -\frac{v_{04}}{a_{03}} \approx 1{,}1 с$.

Законы изменения скорости и координаты ящика на том этапе имеет вид

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{04} + a_{04} t \\ x_0 &= l_0 + l_1 + v_{04} t + \frac{a_{04} t^2}{2} \end{aligned}. \tag{4}$$

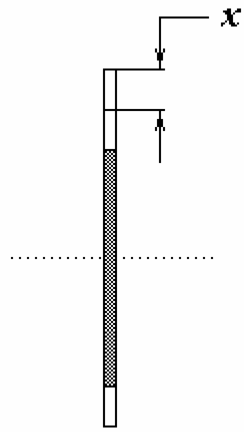
Графики зависимостей скоростей от времени показаны на рисунке.



2. Полный путь до остановки оставит ***33,6 м*** за время ***12,9 с***.

Задание 10.3

Поскольку кольцо и стержень имеют заряды противоположных знаков, то в положении равновесия стержень расположится симметрично относительно центра кольца. Рассмотрим малое смещение x $(x << R)$ стержня из положения равновесия например вверх (рис. 2). Поскольку при этом над кольцом окажется большая часть стержня, то результирующая сила со стороны кольца будет стремиться вернуть стержень в положение равновесия.



Для расчета этой силы заметим, что в данном случае «нескомпенсированной» остается только сила притяжения к кольцу малого участка стержня длиной $2x$ (незаштрихованная на рис.), имеющая заряд

$$\Delta q = \lambda 2x = \frac{q}{l} 2x = \frac{q}{R} x. \qquad (1)$$

Поскольку напряженность электростатического поля на оси кольца на расстоянии h от его центра вычисляется по формуле

$$E(h) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (2)$$

то для нашего случая ($h = R$) получаем

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{(2R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2}. \qquad (3)$$

Таким образом, уравнение движения (второй закон Ньютона) для стержня примет вид

$$ma = mx''(t) = -\Delta q \cdot E(R) = -\frac{q}{R} \cdot \frac{q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot x = -\frac{q^2}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot x. \qquad (4)$$

Уравнение (4) можно переписать в виде стандартного уравнения гармонических колебаний