создаваемое им самим. Из принципа суперпозиции магнитных полей следует (покажите это самостоятельно), что корректный учет этого замечания приводит к уменьшению индукции «действующего» поля самого цилиндра ровно в два раза. Таким образом, при вычислении давления следует заменить стандартное значение индукции поля рассматриваемого $i-го$ цилиндра (1) на новое «эффективное» значение

$$B_i^* = \frac{\mu_0 \sigma_i \omega_i R_i}{2}. \qquad (6)$$

Для уединенного цилиндра сила Ампера, действующая на рассматриваемый элемент $\Delta S_i = \Delta l_i \times \Delta l_j$ перпендикулярно его поверхности

$$F_A = I_\Sigma B^* \Delta l_i = \{I_\Sigma = i\Delta l_j = \sigma\omega R \Delta l_j\} = \sigma\omega R \Delta l_j B^* \Delta l_i = \mu_0 \frac{\sigma^2 \omega^2 R^2 \Delta l_j \Delta l_i}{2}, \qquad (7)$$

создает давление

$$p = \frac{F_A}{\Delta S_i} = \mu_0 \frac{\sigma^2 \omega^2 R^2}{2}. \qquad (8)$$

В нашем случае внешний цилиндр радиуса R_2 будет испытывать давление только со стороны «внутреннего» поля

$$p_2 = \mu_0 \frac{\sigma_2^2 \omega_2^2 R_2^2}{2}. \qquad (9)$$

Внутренний цилиндр радиуса R_1, соответственно, будет находиться под давлением

$$p_1 = \mu_0 \sigma_1 \omega_1 R_1 \left(\frac{\sigma_1 \omega_1 R_1}{2} + \sigma_2 \omega_2 R_2\right). \qquad (10)$$

Подчеркнем, что в случае вращения цилиндров в различных направлениях в выражениях (9) – (10) следует использовать знак «-».

11 класс.

Задание 11.1

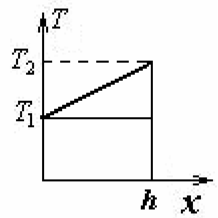
1. В стационарном режиме плотность теплового потока остается постоянной во всех точках внутри пластины

$$q = -\beta \frac{\Delta T}{\Delta x} = const. \qquad (1)$$

Из этого условия следует, что температура внутри пластины изменяется по линейному закону. Учитывая значения температур на противоположных сторонах пластины, можно записать

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h} x. \qquad (2)$$

2. Пусть для определенности $T_2 > T_1$. Тогда до установления стационарного режима пластинка площади S должна поглотить количество теплоты



$$Q = c_1 \rho_1 S h \frac{(T_2 - T_1)}{2}. \qquad (3)$$

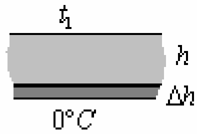
Для получения оценки характерного времени установления теплового равновесия примем, что тепловой поток от более нагретой стороны пластины равен потоку в стационарном режиме, тогда за время τ пластинка получит количество теплоты, равное

$$Q = \beta_1 S \frac{T_2 - T_1}{h} \tau. \qquad (4)$$

Приравнивая эти выражения, получим оценку времени установления равновесия

$$\tau_0 \approx \frac{c_1 \rho_1 h^2}{2\beta_1}. \qquad (5)$$

Подставляя численные характеристики льда, получим $\tau_0 \approx 4 \cdot 10^4 c \approx 11 час$.



3. При замерзании (кристаллизации) льда выделяется некоторое количество теплоты, которое должно быть перенесено через имеющийся слой льда в окружающий воздух.

Будем считать, что в любой момент времени при любой толщине льда h распределение температуры внутри льда соответствует стационарному (справедливость этого предположения оценим далее). Пусть за малый промежуток времени $\Delta\tau$ толщина льда увеличилась на величину Δh, тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$\lambda \rho_1 S \Delta h = \beta_1 S \frac{\Delta t^\circ}{h} \Delta \tau, \qquad (6)$$

где $\Delta t^\circ = -t_1$ разность температур между нижней и верхней границей льда.

Учитывая, что для малых интервалов $h \Delta h = \Delta\left(\frac{h^2}{2}\right)$ из уравнения (6) получим

$$\tau = \frac{\lambda \rho_1 h^2}{2\beta_1 \Delta t^\circ}. \qquad (7)$$

Сравнивая это выражение с оценкой времени установления стационарного теплового потока (5), найдем отношение характерного времени установления стационарного режима ко времени намерзания $\frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{c_1 \Delta t^\circ}{\lambda} \approx 0{,}06$. Как следует из этого, время намерзания более чем на порядок превышает время установления стационарного режима, что обосновывает сделанное приближение о квазистационарном потоке через толщу льда. Из соотношения (7) находим зависимость толщины льда от времени

$$h = \sqrt{\frac{2\beta_1 \Delta t^\circ}{\lambda \rho_1} \tau}. \qquad (8)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$h = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}2 \cdot 10}{3{,}3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}90 \cdot 10^3} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 30 см.$$

4. При плавлении льда, теплота необходимая для плавления поступает от нагретого воздуха через слой воды посредством теплопередачи. Опять используем квазистационарное приближение. Обозначим толщину льда в произвольный момент времени τ - x, а толщину слоя воды h. Используя условие сохранения воды, запишем равенство

$$\rho_1 x + \rho_0 h = \rho_1 h_0, \qquad (9)$$

из которого следует

$$h = \frac{\rho_1}{\rho_0}(h_0 - x), \qquad (10)$$

Пусть за время $\Delta\tau$ толщина льда уменьшилась на величину Δx, тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$\beta_0 \frac{t_1}{h} S \Delta \tau = -\lambda \rho_1 S \Delta x. \qquad (11)$$

Из уравнений (10)-(11) с учетом начальных условий получим соотношение

$$\frac{(h_0 - x)^2}{2} = \frac{\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda}\tau, \qquad (12)$$

из которого определим закон изменения толщины льда

$$x = h_0 - \sqrt{\frac{2\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda}\tau}, \qquad (13)$$

и время плавления слоя льда

$$\tau = \frac{\rho_1^2 \lambda h_0^2}{2\beta_0 t_1 \rho_0} \approx 1{,}9 \cdot 10^2\, c \approx 22 суток. \qquad (14)$$

4. Так как нагрев воды осуществляется снизу, то благодаря конвекции, происходит ее быстрое перемешивание, поэтому можно считать, что температура воды одинакова во всех точках, обозначим эту температуру t. В такой ситуации теплота, поступающая от нагретой плиты, расходуется на плавление льда и нагрев образующейся талой воды. Уравнения теплового баланса для малого промежутка времени $\Delta\tau$ в этом случае имеют вид (Δx - по-прежнему изменение толщины льда за этот промежуток времени)

$$\gamma(t_1 - t)S\Delta\tau = \gamma(t - t_0)S\Delta\tau + c_0\rho_1 S\Delta x(t - t_0), \qquad (15)$$

$$\gamma(t - t_0)S\Delta\tau = \lambda\rho_1 S\Delta x. \qquad (16)$$

Избавляясь от скорости плавления $\frac{\Delta x}{\Delta\tau}$, получим уравнение для определения температуры воды

$$t^2 + 2\frac{\lambda}{c_0}t - \frac{\lambda}{c_0}t_1 = 0,$$

из которого находим температуру воды $t = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{c_0}\right)^2 + \frac{\lambda}{c_0}t_1} - \frac{\lambda}{c_0} \approx 4{,}85°C$, которая оказывается постоянной. Следовательно, и скорость плавления льда также постоянна

$$\frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \frac{\gamma t}{\lambda\rho_1}. \qquad (17)$$

Поэтому толщина льда будет изменяться по линейному закону

$$x = h_0 - \frac{\gamma t}{\lambda\rho_1}\tau, \qquad (18)$$

а время плавления рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{\lambda\rho_1}{\gamma t}h_0 \approx 1{,}5 \cdot 10^4\, c \approx 4{,}3 часа. \qquad (20)$$

Задание 11.2

Так как пластинки одинаковы, то сообщенный заряд q распределится между ними поровну. Электрическая сила, действующая на подвижную пластинку, может быть определена из очевидной цепочки равенств

$$F = E\frac{q}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{2} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{2S}\cdot\frac{q}{2} = \frac{q^2}{8\varepsilon_0 S}. \qquad (1)$$

Эта постоянная сила отталкивания уравновешивается силой упругости пружинок

$$F = kx, \qquad (2)$$

поэтому заряд прибора и смещением пружинки связаны соотношениями

$$x = \frac{q^2}{8\varepsilon_0 Sk}; \qquad q = \sqrt{8\varepsilon_0 Skx}. \qquad (3)$$

Минимальный заряд, который можно измерить с помощью данного прибора, равен