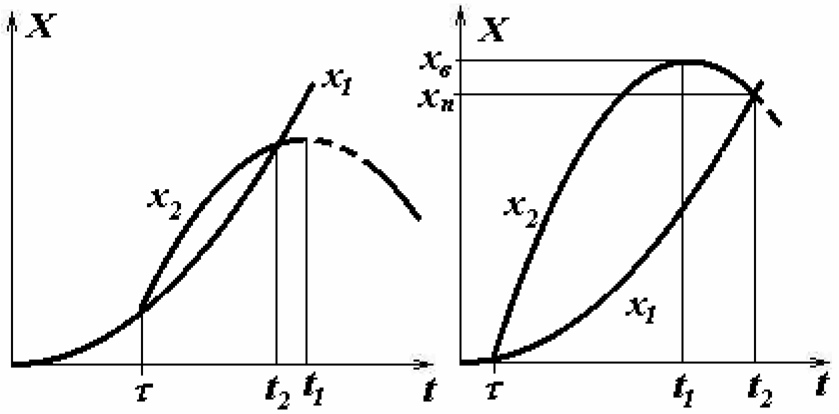
Задние 9.3

1. Законы движения платформы $x_1(t)$ и шарика $x_2(t)$ имеют вид

$$x_1 = \frac{at^2}{2}$$
$$x_2 = \frac{a\tau^2}{2} + (a\tau + v_0)\cdot(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2} \qquad (1)$$

Здесь начало отсчета времени совмещено со стартом платформы, а начало отсчета вертикальной оси X находится на поверхности земли.

Схематические графики законов движения показаны ниже на рисунке.



Следует отметить, что в данной задаче следует рассмотреть два варианта:

- до падения на платформу шарик успевает достичь верхней точки траектории свободного движения;
- платформа догоняет шарик , который продолжает двигаться вверх.

Для упрощения дальнейших расчетов совместим начало отсчета координат с точкой, в которой был брошен шарик, с этим же моментом свяжем начало отсчета времени. В такой системе отсчета законы движения имеют вид

$$x_1 = a\tau\cdot t + \frac{at^2}{2}$$
$$x_2 = (a\tau + v_0)\cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Определим момент времени падения шарика на платформу t_2, для чего следует решить уравнение $x_1(t_2) = x_2(t_2)$. Решение этого уравнения выражается формулой

$$t_2 = \frac{2v_0}{a+g}. \qquad (3)$$

При свободном движении шарика в верхней точке его скорость обращается в нуль, что позволяет найти этот момент времени. Так как скорость шарика изменяется по закону $v_2 = (a\tau + v_0) - gt$, то скорость шарика может обратиться в нуль при

$$t_1 = \frac{a\tau + v_0}{g}. \qquad (4)$$

Итак, шарик не успеет достичь верхней точки своей траектории свободного движения при выполнении условии $t_1 > t_2$, или при следующем соотношении между исходными параметрами

$$v_0 < a\tau \frac{g+a}{g-a}. \qquad (5)$$

В этом случае модуль перемещения и пройденный путь равны и могут быть найдены как координата точки падения шарика на платформу

$$x_n = x_1(t_2) = x_2(t_2) = \frac{2v_0 a}{a+g} \cdot \left(\tau + \frac{v_0}{a+g}\right). \qquad (6)$$

Если же неравенство (5) не выполняется, то пройденный путь будет превышать модуль перемещения (который, по-прежнему, определяется формулой (6)). Как легко увидеть из графиков законов движения, в этом случае пройденный путь равен

$$S = x_n + 2(x_в - x_n), \qquad (7)$$

где $x_в$-координата верхней точки траектории, которая в свою очередь легко определима

$$x_в = \frac{(a\tau + v_0)^2}{2g}. \qquad (8)$$

Итак, окончательно получим выражения для пройденного пути

$$S = \frac{(a\tau + v_0)^2}{g} - \frac{2v_0 a}{a+g} \cdot \left(\tau + \frac{v_0}{a+g}\right). \qquad (9)$$

Задание 9.4

а) процесс разрезания бруса представляет собой процесс плавления той области образца, где проходит нож. Следовательно, необходимо расплавить слой льда массой

$$m = \rho \cdot V = \rho ab2r\ , \qquad (1)$$

где ρ^* - плотность льда. Для этого потребуется количество теплоты

$$Q = \lambda \cdot m = 2\lambda\rho abr\,, \qquad (2)$$

которое должно выделится на резисторе сопротивлением

$$R = \rho^* \frac{l}{S} = \rho^* \frac{b}{\pi r^2}\ , \qquad (3)$$

где ρ^*— удельное сопротивление стали. С учетом закона Джоуля-Ленца можем записать

$$\frac{U^2}{R} t_1 = \lambda m \quad \Rightarrow \quad \{(1)-(3)\} \quad \Rightarrow \quad \frac{U^2 \pi r^2}{\rho^* b} t_1 = 2\lambda\rho abr\ . \qquad (4)$$

Из (4) находим искомое время

$$t_1 = \frac{2\lambda\rho\rho^* ab^2}{U^2 \pi r} = 1{,}9 \cdot 10^2\ \text{с}. \qquad (5)$$

Соответственно, для скорости движения ножа получаем

$$\upsilon = \frac{a}{t_1} = \frac{U^2 \pi r}{2\lambda\rho\rho^* b^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 5{,}3\,\frac{\text{мм}}{\text{с}}. \qquad (6)$$

Из анализа (6) видно, что при заданных параметрах системы скорость движения ножа относительно бруса является постоянной величиной и не зависит от толщины a бруса.

б) Для решения задачи в этом случае перейдем в подвижную систему отсчета, связанную с брусом, т.е. движущуюся влево со скоростью $\vec{u}$. Согласно преобразованиям Галилея при таком переходе (прямом) скорость ножа относительно земли $\vec{w}$ связана с относительной скоростью $\vec{\upsilon}$ следующим образом

$$\vec{\upsilon} = \vec{w} - \vec{u}\,. \qquad (7)$$