2.3 Для нахождения радиуса пузырька r_{max} у поверхности воды необходимо знать время его всплытия t_{max}. Заметим, что при точном решении на рис.4 при $t = t_{max}$ площадь под графиком S (или площадь криволинейной трапеции) должна быть равна глубине сосуда h

$$S(t_{\max}) = h\,.$$

Для оценки этой величины мы поступим достаточно «прямолинейно». При всплытии максимальная скорость пузырька υ_{max} достигается у поверхности

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\gamma t_{\max}}\,. \tag{6}$$

Заменим кривую на графике зависимости (5) прямой, т.е. будем считать движение пузырька равноускоренным, тогда его средняя скорость

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{0 + \upsilon_{\max}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma t_{\max}}\,.$$

Тогда

$$h = \langle \upsilon \rangle t_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma t_{\max}} \cdot t_{\max} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}(t_{\max})^{\frac{3}{2}}\,. \tag{7}$$

С помощью (7) получаем оценку для времени всплытия t_{max}

$$t_{\max} = \left(\frac{2h}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{8}$$

Соответственно с учетом (4) и (8) находим r_{max}

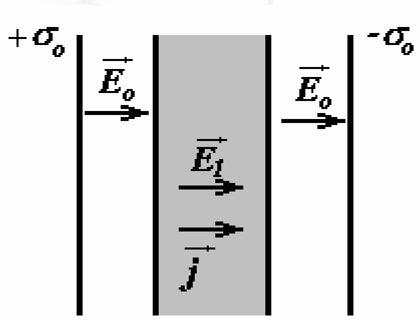
$$r_{\max} = \beta \cdot t_{\max} = \beta\left(\frac{2h}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{C_x D^2 N^2 h^2}{g}}\,. \tag{9}$$

Для расчета примем, что диаметр молекулы воды по порядку величины равен диаметру атома водорода $D = 1A = 1{,}0 \cdot 10^{-10}\ м$, тогда из (9) получаем:

$$r_{\max} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ м = 1{,}1\ мм\,.$$

<u>Задача 3. «Диэлектрик или проводник?»</u>

Рассмотрим физическую картину происходящих явлений. Сразу после замыкания цепи на пластинке возникают поляризационные заряды (пластинка на малых временах ведет себя как диэлектрик), затем в пластике в результате протекания тока происходит перераспределение заряда, пока поле внутри пластинки не исчезнет (пластинка становится проводником).



Обозначим поверхностную плотность заряда на обкладках конденсатора σ_0, а на поверхности пластинки σ' (знаки зарядов указаны на рисунке). Так как напряжение между обкладками поддерживается постоянным, то выполняется соотношение

$$U_0 = E_0 \frac{h}{2} + E_1 \frac{h}{2}\,, \tag{1}$$

где E_0, E_1 напряженности электрических полей между обкладками и пластинкой и внутри пластинки, соответственно. Напряженности полей связаны с поверхностными плотностями зарядов соотношениями

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}; \quad E_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}\,. \tag{2}$$

После замыкания цепи практически мгновенно на пластинке возникнут поляризационные заряды, такие, что напряженность поля внутри пластики будет в ε раз меньше напряженности поля вне ее $E_1 = \dfrac{E_0}{\varepsilon}$, поэтому из соотношения (1) получим

$$U_0 = E_0 \frac{h}{2} + \frac{E_0}{\varepsilon}\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \cdot \frac{2U_0}{h}. \tag{3}$$

Это поле создается зарядами на обкладках

$$Q_0 = \sigma_0 S = \varepsilon_0 E_0 S = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \cdot \frac{2U_0 \varepsilon_0 S}{h} \approx 7{,}9 \cdot 10^{-8}\,Кл. \tag{4}$$

Под действием поля внутри пластинки начнет течь электрический ток, который будет изменять заряды, как на поверхности пластинки, так и на обкладках конденсатора. Ток прекратится, когда напряженность поля внутри пластинки станет равной нулю. После завершения этого процесса перераспределения напряженности полей станут равными

$$E_1 = 0; \quad E_0 = \frac{2U_0}{h},$$

а заряд на обкладках

$$Q_{01} = \sigma_0 S = \varepsilon_0 E_0 S = \frac{2U_0 \varepsilon_0 S}{h} \approx 11 \cdot 10^{-8}\,Кл. \tag{5}$$

Таким образом, заряд конденсатора будет изменяться от $Q_0 \approx 7{,}9 \cdot 10^{-8}\,Кл$ до $Q_{01} \approx 11 \cdot 10^{-8}\,Кл$.

Для описания динамики изменения этого заряда из соотношение (1) –(2) выразим

$$\begin{gathered} \sigma_0 = \frac{U_0 \varepsilon_0}{h} + \frac{\sigma'}{2} \\ Q_0 = \frac{U_0 \varepsilon_0 S}{h} + \frac{Q'}{2} \end{gathered}, \tag{6}$$

где Q' - заряд на поверхности пластинки. Изменение этого заряда обусловлено электрическим током внутри пластинки, сила которого определяется законом Ома

$$\frac{\Delta Q'}{\Delta t} = I = \frac{E_1 \frac{h}{2}}{R} = \frac{E_1 \frac{h}{2}}{\rho \frac{h}{2}} S = \frac{E_1}{\rho} S = \frac{Q_0 - Q'}{\varepsilon_0 \rho}. \tag{7}$$

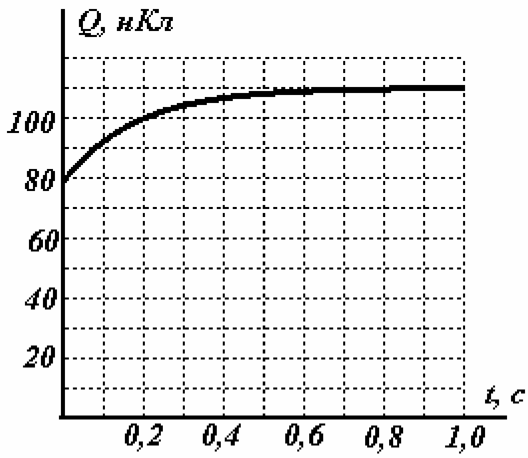
Избавляясь в этом уравнении от Q' с помощью соотношений (6) получим уравнение, описывающее изменение заряда конденсатора

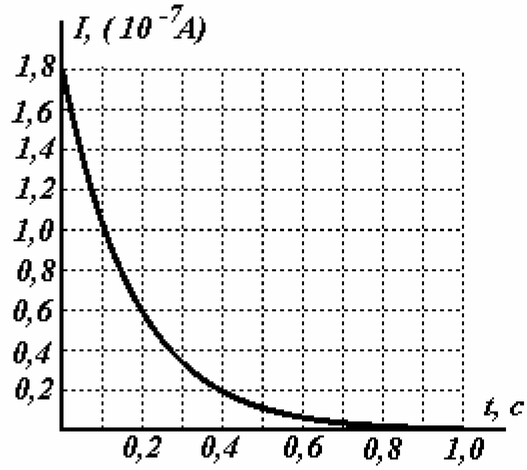
$$I_0 = \frac{\Delta Q_0}{\Delta t} = -\frac{1}{2\varepsilon_0 \rho}\left(Q_0 - \frac{2U_0 \varepsilon_0 S}{h}\right) = -\frac{1}{2\varepsilon_0 \rho}\left(Q_0 - Q_{01}\right). \tag{8}$$

Из этого уравнения следует, что характерное время изменения заряда (следовательно, и существования тока) равно

$$\tau = 2\rho\varepsilon_0 \approx 0{,}18c. \tag{9}$$

Начальное значение силы тока $I_{00} = -\dfrac{1}{2\varepsilon_0 \rho}\left(Q_0 - Q_{01}\right) \approx 1{,}8 \cdot 10^{-7}\,A$, который затем убывает до нуля.





Для определения количества теплоты, выделившейся в пластинке, можно воспользоваться энергетическим соотношением:

- после замыкания цепи конденсатор обладал энергией $W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2} = \frac{1}{2} Q_0 U_0$, где $C_0 = \left(\left(\frac{2\varepsilon_0 S}{h} \right)^{-1} + \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{h} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \frac{2\varepsilon_0 S}{h}$ - начальная емкость конденсатора;

- за время протекания тока источник совершил работу $A = (Q_{01} - Q_0)U_0$;

- после перераспределения конденсатор обладает энергией $W_1 = \frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{1}{2} Q_{01} U_0$, где $C = \frac{2\varepsilon_0 S}{h}$ - емкость конденсатора, после прекращения тока.

Таким образом, энергетический баланс представляется уравнением

$$W_0 + A = W_1 + \tilde{Q}, \qquad (10)$$

здесь $\tilde{Q}$ - количество выделившейся теплоты. Из этого уравнения находим

$$\tilde{Q} = A + W_0 - W_1 = (Q_{10} - Q_0)U_0 - \frac{1}{2}(Q_{10} - Q_0)U_0 = \frac{1}{2}(Q_{10} - Q_0)U_0 = 7{,}8 \cdot 10^{-5}\ Дж$$

Задача 4. «Плоская Земля»

4.1 С точки зрения математики закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона (основной закон электростатики) являются схожими, если считать массу m своеобразным «гравитационным зарядом» или наоборот, представить электрический заряд q «электрической массой»

$$\left|\vec{F}\right| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}\right| = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

В продолжение этой аналогии можем сказать, что ускорение свободного падения $\vec{g}$ в теории гравитации является «силовым аналогом» вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F} = q\vec{E}.$$