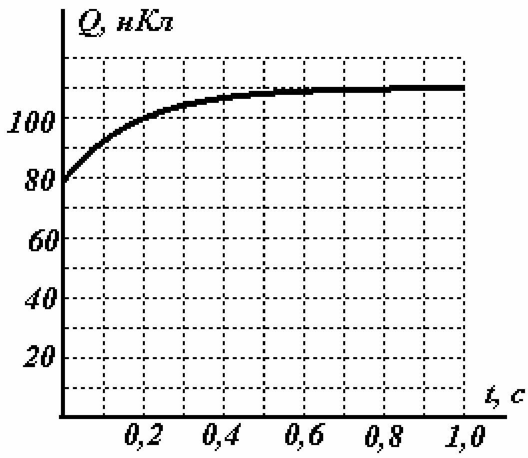
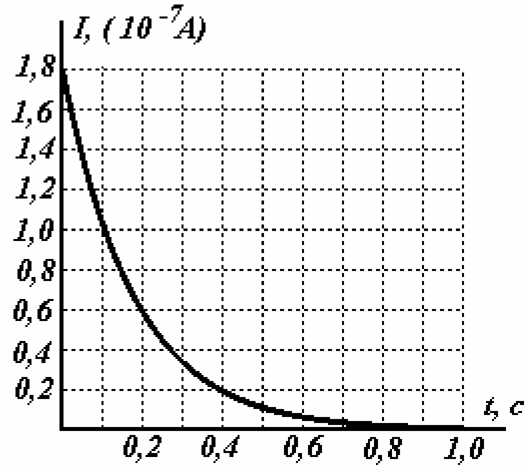




Для определения количества теплоты, выделившейся в пластинке, можно воспользоваться энергетическим соотношением:

- после замыкания цепи конденсатор обладал энергией $W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2} = \frac{1}{2} Q_0 U_0$, где $C_0 = \left(\left(\frac{2\varepsilon_0 S}{h} \right)^{-1} + \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{h} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \frac{2\varepsilon_0 S}{h}$ - начальная емкость конденсатора;

- за время протекания тока источник совершил работу $A = (Q_{01} - Q_0)U_0$;

- после перераспределения конденсатор обладает энергией $W_1 = \frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{1}{2} Q_{01} U_0$, где $C = \frac{2\varepsilon_0 S}{h}$ - емкость конденсатора, после прекращения тока.

Таким образом, энергетический баланс представляется уравнением

$$W_0 + A = W_1 + \widetilde{Q}, \qquad (10)$$

здесь $\widetilde{Q}$ - количество выделившейся теплоты. Из этого уравнения находим

$$\widetilde{Q} = A + W_0 - W_1 = (Q_{10} - Q_0)U_0 - \frac{1}{2}(Q_{10} - Q_0)U_0 = \frac{1}{2}(Q_{10} - Q_0)U_0 = 7{,}8 \cdot 10^{-5}\ Дж$$

Задача 4. «Плоская Земля»

4.1 С точки зрения математики закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона (основной закон электростатики) являются схожими, если считать массу m своеобразным «гравитационным зарядом» или наоборот, представить электрический заряд q «электрической массой»

$$\left| \vec{F} \right| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \vec{F} \right| = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

В продолжение этой аналогии можем сказать, что ускорение свободного падения $\vec{g}$ в теории гравитации является «силовым аналогом» вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F} = q\vec{E}.$$

Таким образом, можем составить небольшую табличку «гравитационно-электрических» аналогий.

№	Гравитация	Электростатика
1.	m	q
2.	$\vec{g}$	$\vec{E}$
3.	G	$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
4.	$\dfrac{1}{4\pi G}$	ε_0

Напряженность электрического поля E пластины толщиной h, заряженной с постоянной объемной плотностью ρ:

$$E = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0}.$$

Следовательно, методом аналогий находим, что ускорение свободного падения на северном полюсе (вдали от краев пластины)

$$g = \frac{\rho h}{2} 4\pi G = 2\pi G \rho h. \qquad (1)$$

С помощью (1) находим искомую толщину Земного диска

$$h = \frac{g}{2\pi G\rho} = 4{,}3 \cdot 10^6 \text{ м} = 4{,}3 \cdot 10^3 \text{ км}. \qquad (2)$$

4.2 При движении камешка внутри шахты на него будет действовать переменная сила тяжести $F(x)$, график зависимости которой от расстояния x до «нулевого сечения» планеты (на глубине $\frac{h}{2}$) представлен на рис. 5.

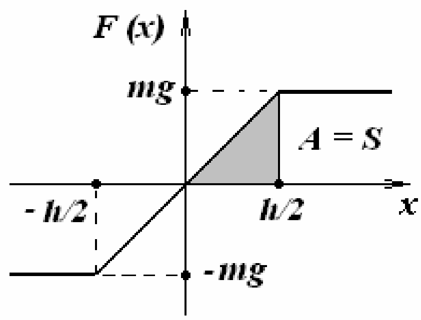


Рис. 5

Работа силы тяжести A равна заштрихованной площади под графиком S (площади прямоугольного треугольника)

$$A = \frac{1}{2} mg \frac{h}{2},$$

где h дается выражением (2). Скорость камешка будет максимальной именно в нулевом сечении, поскольку при дальнейшем движении гравитационные силы начнут его притормаживать.

Согласно теореме о кинетической энергии в этом случае получаем

$$\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = A = mg\frac{h}{4}, \qquad (3)$$

где m — масса камешка. Из (3) находим

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi G\rho}} = 4{,}6 \cdot 10^3 \, \frac{\text{м}}{\text{с}} = 4{,}6 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \qquad (4)$$

Как видим из (4) даже плоская Земля разгонит камешек до «полукосмической» скорости.

4.3 **а)** рассмотрим выстрел из суперкатапульты вдоль меридиана от центра планеты. Афины вращаются вокруг центра Земли с линейной скоростью $\upsilon = \omega r$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ —

угловая скорость вращения планеты, $T = 86\,400$с — период обращения Земли вокруг своей оси.

Соответственно, эту же скорость приобретает снаряд в азимутальном направлении относительного абсолютного наблюдателя, находящегося в центре Земли (рис. 6). Однако линейная скорость вращения точек в районе приземления больше (они дальше!) на величину $\Delta\upsilon$

$$\Delta\upsilon = \omega(r+\Delta r) - \omega r = \omega\Delta r\,, \quad (5)$$

где $\Delta r = \dfrac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha = \dfrac{\upsilon_0^2}{g}$ — дальность полета снаряда на неподвижной Земле. Соответственно за время полета снаряда $t = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$ эти точки «уйдут вперед» на величину

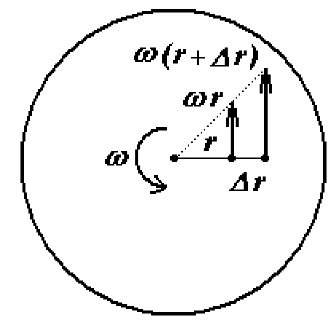


Рис. 6

$$\Delta S = \Delta\upsilon t = \omega\Delta r\,\frac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g} = \frac{4\pi}{T}\frac{\upsilon_0^3}{g^2}\sin\alpha = 1{,}1\,м\,. \quad (6)$$

Поскольку меридиан уйдет вперед по направлению вращения Земли, то для наблюдателя снаряд отклонится на запад от меридиана на величину $\Delta S = 1{,}1\,м$.

Легко догадаться, что при приближении снаряда к центру Земли линейная скорость вращения точек ее поверхности будет уменьшаться, т.е. теперь, в отличие от предыдущего случая, снаряд будет их «обгонять». Соответственно, меридиан в этом случае «отстанет» на ту же величину $\Delta S = 1{,}1\,м$, но в другом направлении. Таким образом, для земного наблюдателя при выстреле из катапульты вдоль меридиана по направлению к центру Земли снаряд отклонится уже на восток, но на ту же величину $\Delta S = 1{,}1\,м$.

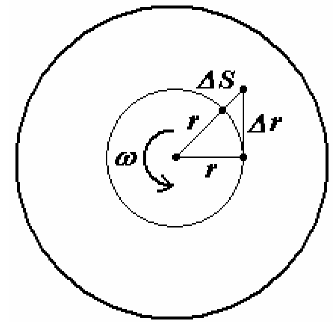


Рис. 7

б) при выстреле вдоль параллели на восток (запад) (рис. 7) снаряд также добавляет (теряет) азимутальный компонент скорости, что меняет его дальность полета. Кроме того, как следует из рис.7, за время полета снаряда точки параллели «повернут» относительно плоскости его полета, вследствие чего точка падения снаряда окажется на некотором расстоянии ΔS от параллели.

Таким образом, дальность полета снаряда Δr при выстреле на восток (по направлению вращения диска)

$$\Delta r = (\upsilon_0\cos\alpha + \omega r)\frac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}\,. \quad (7)$$

При выстреле на запад (против направления вращения земного диска)

$$\Delta r = (\upsilon_0\cos\alpha - \omega r)\frac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}\,. \quad (8)$$

Заметим, что в этом случае (см. рис.7) смещение снаряда ΔS происходит всегда на юг, т.к. он в любом случае удаляется от центра Земли (параллели). При этом, согласно теореме Пифагора,

$$(r+\Delta S)^2 = r^2 + \Delta r^2\,. \quad (9)$$

Поскольку $\Delta S \ll r$, то в (9) можно пренебречь слагаемым $(\Delta S)^2$, что приводит к результату

$$\Delta S = \frac{\Delta r^2}{2r} = \frac{(\upsilon_0\cos\alpha \pm \omega r)^2\,(2\upsilon_0\sin\alpha)^2}{2rg^2} = \frac{2\,(\upsilon_0\cos\alpha \pm \omega r)^2\,\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{r\,g^2}\,. \quad (10)$$

Подчеркнем, что при расчетах в (10) следует брать знак «+» в случае выстрела на восток

$$\Delta S = 3{,}4\,м,$$

и знак «-» в случае выстрела на запад

$$\Delta S = 1{,}3\,м.$$

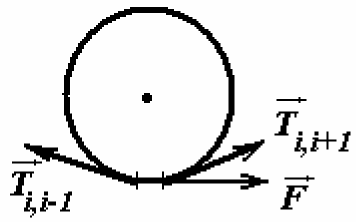
Таким образом, для земного наблюдателя при выстреле из суперкатапульты вдоль параллели снаряд отклонится на юг в любом случае, но величины смещений в этом случае будут разными: $\Delta S = 3{,}4\,м$ при выстреле на восток и $\Delta S = 1{,}3\,м$ при выстреле на запад.

Решения 11 класс.

<u>Задача 1. «Хорошо ли Вы знаете силу трения?»</u>

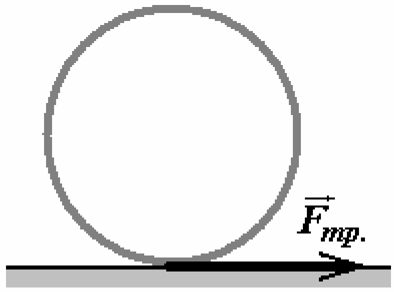
1.0 Для вывода данного соотношения (уравнения динамики вращательного движения) достаточно рассмотреть уравнение второго закона для небольшого участка цилиндра и затем просуммировать его по всем участкам с учетом третьего закона Ньютона.
Так для i-того участка можно записать

$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{T}_{i,i+1} + \vec{T}_{i,i-1},$$



где $\vec{T}_{i,i+1}, \vec{T}_{i,i-1}$ - силы, действующие на i-тый участок со стороны соседей. В проекции на тангенциальное направление для всех участков $|\vec{a}_i| = R\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$, при суммировании все внутренние силы «исчезнут», останутся только тангенциальные составляющие внешних сил.

1.1 Сила трения, действующая на трубку, сообщает ей линейное ускорение, приводящее к увеличению скорости центра трубки



$$ma = F_{тр}. \qquad (1)$$

Скорость будет изменяться по закону

$$V = \frac{F_{тр}}{m}t. \qquad (2)$$

Эта же сила будет тормозить вращение трубки, согласно уравнению динамики вращательного движения

$$mR\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -F_{тр}. \qquad (3)$$

Поэтому угловая скорость будет уменьшаться по закону

$$\omega = \omega_0 - \frac{F_{тр}}{Rm}t. \qquad (4)$$

Проскальзывание (следовательно, и изменение скоростей) прекратится при выполнении условия $V = \omega R$. Из записанных уравнений следует, что скорость установившегося движения

$$V_{уст} = \frac{\omega_0 R}{2}. \qquad (5)$$

1.2 Если приложенная сила F превышает максимальную силу трения покоя $F_{\max} = \mu mg$, то ускорение бруска находится из уравнения второго закона Ньютона

$$a = \frac{F}{m} - \mu g, \qquad (6)$$

в противном случае ускорение бруска равно нулю.