III этап, 2005г. Решения задач.

9 класс.

1. «Лебедка»

Обозначим время подъема одной бочки по наклонной плоскости t_0. Тогда лебедка совершит за это время работу $A = \eta P_0 t_0$, равную изменения потенциальной энергии бочки $\Delta U = mgh$, т.е.

$$\eta P_0 t_0 = mgh. \tag{1}$$

При перемещении бочки на расстояние L, лебедка должна намотать на вал трос длиной $2L$, поэтому

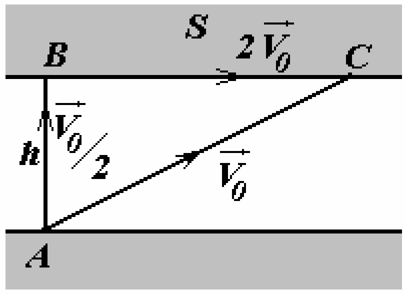
$$2\pi r n t_0 = 2L. \tag{2}$$

Из этих уравнений находим

$$t_0 = \frac{mgh}{\eta P_0}, \tag{3}$$

$$n = \frac{\eta P_0 L}{\pi r m g h}. \tag{4}$$

2 «Триатлон»



Обозначим скорость «байдарочника» v_0. Тогда скорость «пловца» равна $\frac{v_0}{2}$, а скорость бегуна $2v_0$.

Отношения времен движения спортсменов находится достаточно просто

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{\sqrt{h^2+S^2}}{v_0}}{\frac{2h}{v_0} + \frac{S}{2v_0}} = \frac{2\sqrt{h^2+S^2}}{4h+S}. \tag{1}$$

При $h = S$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2\sqrt{h^2+S^2}}{4h+S} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0{,}566, \tag{2}$$

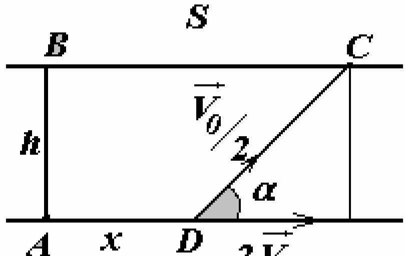
то есть «байдарочник» побеждает.

Спортсмены придут к финишу одновременно при выполнении условия

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2\sqrt{h^2+S^2}}{4h+S} = 1. \tag{3}$$

Решая это уравнение, находим

$$S = \frac{4h + \sqrt{16h^2 + 36h^2}}{3} = h\frac{4 + 2\sqrt{13}}{3} \approx 374\text{м}. \tag{4}$$



Чтобы время движения второго спортсмена было минимально, он может выбрать другой «маршрут»: пусть он сначала бежит по берегу по отрезку AD, а затем вплавь по отрезку DB. Чтобы «выбрать оптимальную точку D, воспользуемся следующими рассуждениями: при движении по берегу, скорость его приближения к точке финиша равна

$$v_C = 2v_0 \cos\alpha . \qquad (5)$$

Очевидно, что имеет смысл бежать по берегу до тех пока, эта скорость больше, чем скорость приближения в плавь. Таким образом, спортсмен должен начать плыть в точке, где направление на точку финиша, определяется соотношением

$$v_C = 2v_0 \cos\alpha = \frac{v_0}{2} . \qquad (6)$$

Из него следует

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}; \quad tg\alpha = \sqrt{15} .$$

Тогда $x = |AD| = S - \dfrac{h}{tg\alpha} \approx 574\text{м}$.

Полное время движения по оптимальному маршруту

$$t_2 = \frac{x}{2v_0} + \frac{\sqrt{h^2 + (S-x)^2}}{\dfrac{v_0}{2}}, \qquad (7)$$

А отношение времен движения

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h^2 + S^2}}{\dfrac{x}{2} + 2\sqrt{h^2 + (S-x)^2}} = \frac{2\sqrt{37}}{6+\sqrt{15}} \approx 1{,}23 . \qquad (8)$$

3. «Термометр»

3.1 Смысл параметров, входящих в приведенные формулы следующий:

l_0, V_0 - длина и объем тела при $t = 0°C$, $\alpha = \dfrac{\Delta l}{l_0}\dfrac{1}{t}$ - относительное удлинение при изменении температуры на 1 градус, аналогично $\beta = \dfrac{\Delta V}{V_0}\dfrac{1}{t}$ - относительное изменение объема при изменении температуры на 1 градус.

3.2 Изменение объема тела может быть выражено через изменение его линейных размеров

$$V = l_{10}(1+\alpha t) l_{20}(1+\alpha t) l_{30}(1+\alpha t) \approx l_{10} l_{20} l_{30} (1 + 3\alpha t),$$

В этом выражении мы пренебрегли малыми слагаемыми второго и третьего порядка.

Сравнивая с формулой для изменения объема $V = V_0(1+\beta t)$, получаем связь между параметрами

$$\beta = 3\alpha . \qquad (1)$$

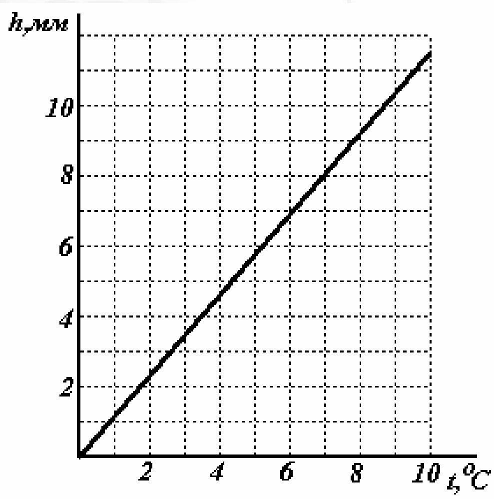
3.3 Для «градуировки» столбика термометра достаточно записать соотношение для изменения объема ртути

$$V_0 + \frac{\pi d_0^2}{4} h = V_0(1+\beta t). \qquad (2)$$

Откуда следует

$$h = \frac{4V_0\beta}{\pi d_0^2} t \approx 1{,}15t , \qquad (3)$$

графиком этой функции является прямая, проходящая через начало координат.



3.4 При учете изменения размеров стекла соотношение для изменения объема ртути имеет вид