$$v_C = 2v_0 \cos\alpha . \qquad (5)$$

Очевидно, что имеет смысл бежать по берегу до тех пока, эта скорость больше, чем скорость приближения в плавь. Таким образом, спортсмен должен начать плыть в точке, где направление на точку финиша, определяется соотношением

$$v_C = 2v_0 \cos\alpha = \frac{v_0}{2} . \qquad (6)$$

Из него следует

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}; \quad tg\alpha = \sqrt{15} .$$

Тогда $x = |AD| = S - \dfrac{h}{tg\alpha} \approx 574 м$.

Полное время движения по оптимальному маршруту

$$t_2 = \frac{x}{2v_0} + \frac{\sqrt{h^2 + (S-x)^2}}{\dfrac{v_0}{2}}, \qquad (7)$$

А отношение времен движения

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h^2 + S^2}}{\dfrac{x}{2} + 2\sqrt{h^2 + (S-x)^2}} = \frac{2\sqrt{37}}{6+\sqrt{15}} \approx 1{,}23 . \qquad (8)$$

3. «Термометр»

3.1 Смысл параметров, входящих в приведенные формулы следующий:
l_0, V_0 - длина и объем тела при $t = 0°C$, $\alpha = \dfrac{\Delta l}{l_0}\dfrac{1}{t}$ - относительное удлинение при изменении температуры на 1 градус, аналогично $\beta = \dfrac{\Delta V}{V_0}\dfrac{1}{t}$ - относительное изменение объема при изменении температуры на 1 градус.

3.2 Изменение объема тела может быть выражено через изменение его линейных размеров

$$V = l_{10}(1+\alpha t)l_{20}(1+\alpha t)l_{30}(1+\alpha t) \approx l_{10}l_{20}l_{30}(1+3\alpha t),$$

В этом выражении мы пренебрегли малыми слагаемыми второго и третьего порядка.
Сравнивая с формулой для изменения объема $V = V_0(1+\beta t)$, получаем связь между параметрами

$$\beta = 3\alpha . \qquad (1)$$

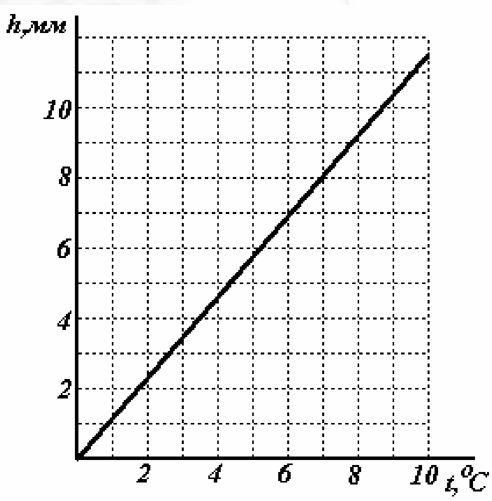
3.3 Для «градуировки» столбика термометра достаточно записать соотношение для изменения объема ртути

$$V_0 + \frac{\pi d_0^2}{4} h = V_0(1+\beta t). \qquad (2)$$

Откуда следует

$$h = \frac{4V_0\beta}{\pi d_0^2} t \approx 1{,}15t , \qquad (3)$$

графиком этой функции является прямая, проходящая через начало координат.



3.4 При учете изменения размеров стекла соотношение для изменения объема ртути имеет вид

$$V_0(1+3\alpha t)+\frac{\pi d_0^2(1+2\alpha t)}{4}h_1=V_0(1+\beta t). \quad (4)$$

Из этого уравнения определяем высоту подъема

$$h_1=\frac{4V_0}{\pi d_0^2}\frac{\beta-3\alpha}{1+2\alpha t}t\approx\frac{4V_0\beta}{\pi d_0^2}t\left(1-3\frac{\alpha}{\beta}-2\alpha t\right). \quad (5)$$

Этому значению высоты подъема, по градуировочной зависимости (3) будет «приписана» температура

$$t_{изм.}=\frac{\pi d_0^2}{4V_0\beta}h_1=t\left(1-3\frac{\alpha}{\beta}-2\alpha t\right).$$

Следовательно, относительная погрешность измерения температуры равна

$$\varepsilon=\frac{t_{изм}-t}{t}=-3\frac{\alpha}{\beta}-2\alpha t\approx-5{,}0\cdot10^{-2}.$$

4. «Поможем Техасу»

4.1 Из уравнения теплового баланса следует, что за единицу времени джоулева теплота $\frac{U^2}{R}=\frac{U^2hb}{\rho a}$, выделившаяся при прохождении тока, пойдет на плавление $m=q\gamma$ килограммов снега, т.е.

$$\frac{U^2hb}{\rho a}=q\gamma\lambda, \quad (1)$$

откуда следует

$$q=\frac{U^2hb}{\rho a\gamma\lambda}\approx2{,}3\cdot10^{-2}\frac{м^3}{с}. \quad (2)$$

4.2 Если за время Δt уровень воды поднялся на Δh, то за это время расплавилось $\Delta m=\Delta hab\gamma$ льда, на что было затрачено количество теплоты, равное $\Delta Q=\frac{U^2}{R}\Delta t=\frac{U^2bh}{\rho a}\Delta t$. Уравнение теплового баланса в этом случае будет иметь вид

$$\frac{U^2bh}{\rho a}\Delta t=\Delta hab\gamma\lambda, \quad (3)$$

из которого следует, что скорость изменения уровня воды в яме пропорциональна высоте этого уровня

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{U^2}{\rho a^2\gamma\lambda}h\approx0{,}18h, \quad (4)$$

где t в минутах, коэффициент пропорциональности имеет размерность $\left[мин^{-1}\right]$

Используя приведенные в условии график можно показать, выполнение этой зависимости, для чего достаточно рассмотреть малые промежутки времени (например, $\Delta t=1мин$).

Так как изменение высоты пропорционально самой высоте, то за одинаковые промежутки <u>времени высота изменяется в одно и тоже число раз</u>. По графику видно, что за время $t\approx4мин$ высота увеличилась в два раза, следовательно, она увеличится в 4 раза за время в два раза большее, то есть за 8 минут.