Задание 10-1. «Калейдоскоп»

1.1 «Масленица» Поскольку гравитационные силы являются потенциальными, то их работа не зависит от траектории, а определяется только конечным и начальным положением материальной точки. Следовательно, во всех трех случаях сила тяжести совершит одинаковую работу

$$\boxed{A_1 = A_2 = A_3 = A_{max} = mgh = 4{,}9 \cdot 10^2 \text{ Дж} = 0{,}49 \text{кДж}}.$$

1.2 «Паровой клапан» На достаточно малый элемент поверхности шарика площадью ΔS_i, который можно считать участком плоскости, со стороны сплошной среды (в данном случае пара) действует нормальная элементарная сила давления $\vec{F}_i$, модуль которой

$$F_i = p\,\Delta S_i, \qquad (1)$$

где p — давление сплошной среды вблизи рассматриваемого участка поверхности. Для нахождения результирующей силы давления $\vec{F}_Д$ со стороны пара следует векторно просуммировать элементарные силы давления $\vec{F}_i$

$$\vec{F}_Д = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_i. \qquad (2)$$

В силу симметрии задачи можем заметить, что вектор $\vec{F}_Д$ направлен нормально границе раздела сред, поэтому для нахождения его модуля достаточно просуммировать только нормальные компоненты векторов $\vec{F}_{i\perp}$, которые перпендикулярны границе раздела

$$F_Д = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} p\,\Delta S_i \cos\alpha_i = p\sum_{i=1}^{\infty} \Delta S_i \cos\alpha_i. \qquad (3)$$

Заметим, что сумма (3) представляет собой сумму площадей проекций элементарных площадок ΔS_i на границу раздела сред. Следовательно, независимо от формы поверхности пробки она всегда будет равна площади отверстия S_o

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta S_i \cos\alpha_i = S_o = \pi r^2. \qquad (4)$$

Иными словами сила давления, действующая на рассматриваемую поверхность произвольной формы равна по модулю и противоположна по направлению силе давления той же сплошной среды на плоскую поверхность отверстия. Данное обстоятельство позволяет легко найти искомую силу $\vec{F}_{min}$

$$\boxed{F_{min} = p\pi r^2 - p_0\pi r^2 = (p - p_0)\pi r^2 = 1{,}5 p_0 \pi r^2 = 23\,\text{Н}}. \qquad (5)$$

Как следует из (5), ответ не зависит от радиуса шарика R, главное, чтобы он был «достаточен» для перекрытия отверстия, иначе шарик будет просто выброшен из скороварки силами давления пара. Результат (5) не изменится, если клапан будет иметь форму, отличную от сферической.

1.3 «Дождевое сопротивление» Сила сопротивления возникает вследствие того, что при движении со скоростью $\upsilon = 16{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ автомобиль «заметает» некоторое количество ΔN капель за промежуток времени Δt, причем каждая капля «несет» с собой определенный импульс $\vec{p}_0$.

Будем считать, что соударение капли с автомобилем носит неупругий характер, т.е. попав на автомобиль, далее капля движется вместе с ним (покоится относительно него). В системе отсчета, связанной с автомобилем, капли движутся вертикально со скоростью $u = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и горизонтально (навстречу автомобилю) со скоростью υ. Пусть концентрация капель в дождевом потоке — n, масса одной капли — m_0, площадь поперечного сечения автомобиля (в направлении движения) — S. Тогда количество капель, попавших на автомобиль за время Δt

$$N = nV = nS\upsilon\Delta t. \tag{1}$$

Соответственно горизонтальный импульс этих капель (в системе отсчета, связанной с автомобилем)

$$p_x = m_0\upsilon\cdot N = m_0 n S\upsilon^2\Delta t. \tag{2}$$

Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме сила представляет собой «скорость изменения импульса»

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{p_x - 0}{\Delta t} = \frac{p_x}{\Delta t} = \{(2)\} = m_0 n S\upsilon^2. \tag{3}$$

Интенсивность дождя $I = \frac{\Delta h}{\Delta t}$ также может быть выражена из элементарных соображений. Действительно, за время Δt в неподвижное вертикальное метеорологическое мерное ведерко площадью поперечного сечения S^* попадет количество капель

$$N = nV = nS^* u\Delta t. \tag{4}$$

Это вызовет подъем уровня жидкости в ведерке на величину

$$\Delta h = \frac{m}{\rho S^*} = \frac{m_0 N}{\rho S^*} = \frac{m_0 n S^* u\Delta t}{\rho S^*} = \frac{m_0 n\, u\Delta t}{\rho}, \tag{5}$$

где ρ — плотность воды. Соответственно, для интенсивности дождя получаем

$$I = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{m_0 n\, u}{\rho} \quad\Rightarrow\quad m_0 n = \frac{\rho I}{u}. \tag{6}$$

Таким образом, окончательное выражение для силы дождевого сопротивления приобретает вид

$$F_x = \frac{\rho I}{u} S\upsilon^2. \tag{7}$$

Величину площади S поперечного сечения автомобиля в направлении движения оценим из рисунка (для этого по периметру рисунка нанесена специальная градуировочная шкала) $S \approx 1{,}5\,\text{м}^2$. Окончательно

$$F_x = \frac{\rho I}{u} S\upsilon^2 = 0{,}35\,\text{Н}. \tag{8}$$

Столь неожиданно малое значение оценки для F_x объясняется малой интенсивностью дождя (т.н. «грибной» дождь) и сравнительно небольшой скоростью автомобиля.

1.4 «Магнитный ограничитель тока» На достаточно малый элемент полукольца длиной Δl_i, который можно считать отрезком, действует сила Ампера $\vec{F}_i$

$$F_i = IB\Delta l_i . \qquad (1)$$

Сила Ампера $\vec{F}_j$, действующая на симметричный элемент кольца Δl_j, имеет такую же величину, поскольку в силу симметрии $\Delta l_i = \Delta l_j$. Момент этой пары сил M_{i+j} относительно точки O

$$M_{i+j} = 2F_i R\cos\alpha_i = 2IB\Delta l_i R\cos\alpha_i = (2IBR)\,\Delta l_i \cos\alpha_i \qquad (2)$$

Соответственно, суммарный момент всех элементарных сил Ампера $\vec{F}_i$ относительно точки O, поднимающий полукольцо вверх, найдем суммированием (2) по всем парам $(i+j)$

$$M = \sum_{i+J}^{\infty}(2IBR)\,\Delta l_i \cos\alpha_i = IBR\sum_{i+J}^{\infty} 2\Delta l_i \cos\alpha_i . \qquad (3)$$

Сумма в (3) представляет собой сумму длин проекций пар элементарных участков на диаметр OA, т.е.

$$M = IBR\sum_{i+J}^{\infty} 2\Delta l_i \cos\alpha_i = IBR(2R) = 2IBR^2 . \qquad (4)$$

Ограничитель «сработает» (т.е. разомкнет цепь) при такой силе тока I_{max}, когда момент сил Ампера сравняется с моментом силы тяжести относительно точки O

$$\boxed{mgR = 2I_{max}BR^2 \;\Rightarrow\; I_{max} = \frac{mg}{2BR} = 9{,}8\cdot 10^2\,\text{А} = 0{,}98\,\text{кА}}. \qquad (5)$$

1.5 «Магнитный толкатель» Как следует из предыдущего пункта, сила Ампера, действующая на провод произвольной формы равна по модулю силе Ампера, действующей на отрезок, соединяющий его начальную и конечную точки.

Построить картину распределения элементарных токов I_i по диску достаточно сложно, однако в силу предыдущего замечания для ответа на вопрос задачи этого и не требуется, поскольку все они начинаются в точке A и заканчиваются в точке B. Следовательно, для нахождения результирующей силы Ампера можно считать, что от точки A к в точке B течет прямой ток I_{min}. Теперь понятно, что диск сдвинется с места по направлению действия силы Ампера, т.е. по нормали к отрезку AB в направлении к центру окружности. Это произойдет после того, как сила Ампера превысит по модулю силу трения покоя (на рис. $\alpha = 80\,°$)

$$\boxed{I_{min}B(2R\sin\frac{\alpha}{2}) = \mu mg \;\Rightarrow\; I_{min} = \frac{\mu mg}{2BR\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{56}{\sin 45°}(A) = 79\,\text{А}}.$$

Решение 10.2. *«Смещение и затухание»*

2.1. Выразите частоту ν_0 колебаний шарика через массу шарика и жесткость пружины.

Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = -kx , \qquad (1)$$

из которого непосредственно следует формула для частоты