Решение 10.3

3.1 Сила тяги автомобиля связана с его мощностью $F_{тяги} = Pv$, поэтому на основании второго закона Ньютона можно записать

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{P}{v} - F_0 - \beta v^2 . \qquad (1)$$

Переход к уравнению для изменения кинетической энергии осуществляется традиционным методом: умножаем уравнение на скорость

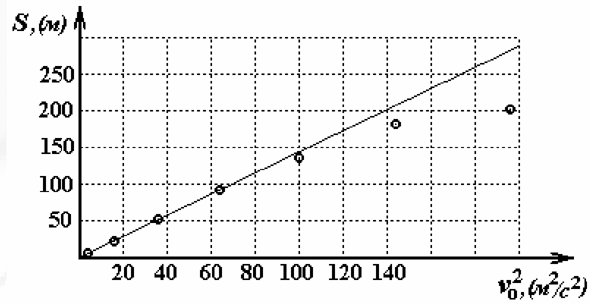
$$mv\frac{\Delta v}{\Delta t} = P - \left(F_0 + \beta v^2\right)v ,$$

замечаем, что $\Delta E = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\Delta v$, и получаем

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P - \left(F_0 + \beta v^2\right)v . \qquad (2)$$

3.2 При малых скоростях движения автомобиля v можно пренебречь силой сопротивления воздуха, тогда на основании уравнения $\frac{mv_0^2}{2} \approx F_0 S$, получим зависимость пути пройденного автомобилем $S \approx \frac{mv_0^2}{2F_0}$ от скорости.

По приведенным экспериментальным данным построим график зависимости пути от квадрата начальной скорости. Действительно при малых скоростях эта зависимость линейна. Из наклона $k = \frac{\Delta S}{\Delta\left(v_0^2\right)} = \frac{m}{2F_0} \approx 1{,}44\frac{c^2}{м}$ графика определяем силу постоянного сопротивления



$$\boxed{F_0 = \frac{m}{2k} \approx 0{,}38\,кН}$$

Коэффициент пропорциональности в выражении для силы сопротивления воздуха определим , зная максимальные скорость и мощность автомобиля. При равномерном движении с максимальной скоростью выполняется соотношение $\frac{P_{max}}{v_{max}} - F_0 - \beta v_{max}^2 = 0$, из которого определяем $\boxed{\beta = \frac{\frac{P_{max}}{v_{max}} - F_0}{v_{max}^2} \approx 1{,}8\frac{кг}{м}}$.

Требуемый параметр также рассчитывается $\boxed{\gamma = \frac{\beta v_{max}^2}{F_0} \approx 3{,}6}$.

3.3 В установившемся режиме выполняется соотношение

$$P = \left(F_0 + \beta v^2\right)v ,$$

аналогично – при движении с максимальной скоростью

$$P_{\max} = \left(F_0 + \beta v_{\max}^2\right) v_{\max}\,.$$

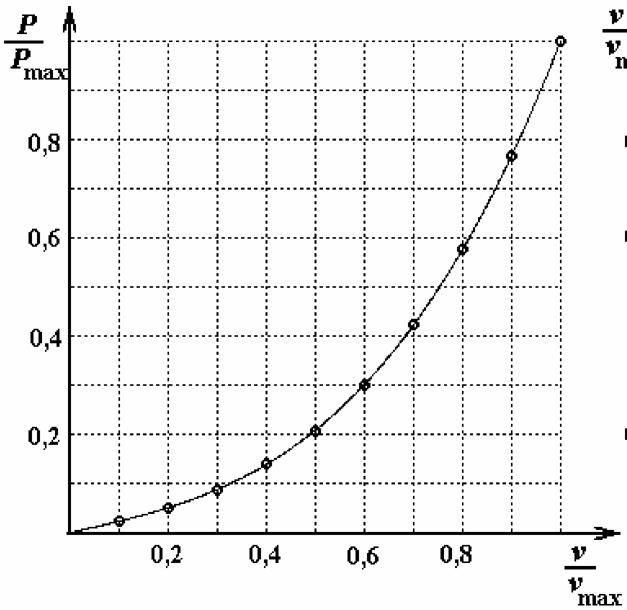
Их отношение

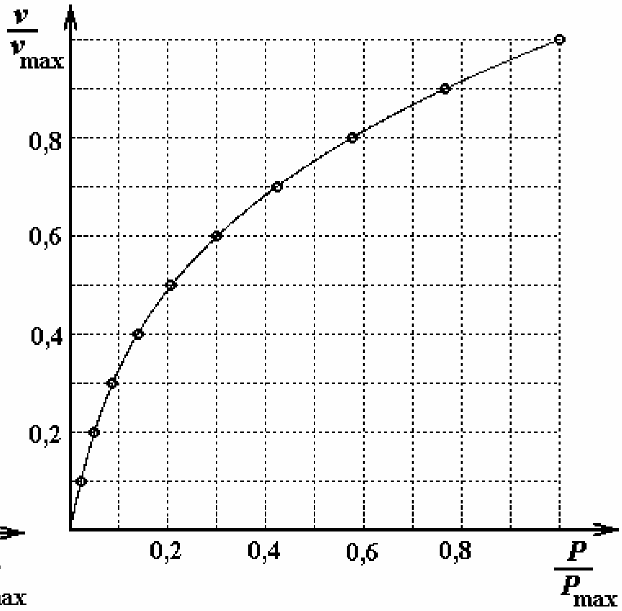
$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{\left(F_0 + \beta v^2\right) v}{\left(F_0 + \beta v_{\max}^2\right) v_{\max}} = \frac{\left(1 + \dfrac{\beta v_{\max}^2}{F_0} \cdot \dfrac{v^2}{v_{\max}^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{\beta v_{\max}^2}{F_0}\right)} \cdot \frac{v}{v_{\max}}$$

дает связь между относительными характеристиками

$$\boxed{\kappa = \frac{\eta\left(1 + \gamma \eta^2\right)}{\left(1 + \gamma\right)}} \qquad (3)$$

Выразить в явном виде зависимость скорости от мощности сложно, зато легко построить график зависимости мощности от скорости, а затем его повернуть.





3.4 При движении в гору автомобиль должен также преодолевать проекцию силы тяжести равную $mg\sin\alpha$. Эта сила постоянна, поэтому можно считать, что она увеличивает параметр F_0 в рассматриваемых уравнениях. Аналогично, сопротивление воздуха изменяет параметр β. В обоих случаях изменяется величина параметра γ в уравнении (3). Таким образом, нам следует разработать методику использования графического решения этого уравнения при изменении параметра γ.

Для определения скорости установившегося движения необходимо решить уравнение

$$P = v\left(F_0 + \beta v^2\right), \qquad (4)$$

которое можно преобразовать к виду (3) и использовать уже построенный график. Обозначим $\gamma_0 = 3{,}5$ и перепишем (4) в виде

$$\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}\frac{P}{F_0}\cdot\frac{1}{1+\gamma_0}=\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}v\right)\left(1+\gamma_0\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}v\right)^2\right)\frac{1}{1+\gamma_0}.$$

Мы имеем уравнение, совпадающее с решенным, только в нем вместо η стоит неизвестная $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}v\right)$, а вместо κ - $\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}\frac{P}{F_0}\cdot\frac{1}{1+\gamma_0}$. Теперь можно провести необходимые расчеты.

При движении в гору:

$F_0' = F_0 + mg\sin\alpha = 1320H$; $\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}\frac{P}{F_0}\cdot\frac{1}{1+\gamma_0}\approx 0{,}12$.

По графику находим $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}v\right)\approx 0{,}3$. Следовательно,

$\boxed{v = 0{,}3\sqrt{\frac{\gamma_0 F_0}{\beta}}\approx 15\frac{м}{c} = 55\frac{км}{час}}$.

При движении с багажником

$\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}\frac{P}{F_0}\cdot\frac{1}{1+\gamma_0}=0{,}85$, из графика находим $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma_0 F_0}}v\right)\approx 0{,}92$, наконец,

$$\boxed{v = 0{,}92\sqrt{\frac{\gamma_0 F_0}{\beta}}\approx 25\frac{м}{c} = 90\frac{км}{час}}.$$

3.5 Рассмотрим динамическое уравнение движения (1) в течении малого временного интервала. В течение этого промежутка скорость возрастает приблизительно пропорционально времени $v = at$, а мощность изменяется по закону $P = \frac{P_{\max}}{\tau}t$, а силой сопротивления воздуха можно пренебречь.

Подставим эти выражения в уравнение (1)

$$ma = \frac{P_{\max}}{\tau a} - F_0 . \qquad (4)$$

Мы получили квадратное уравнение относительно неизвестного ускорения a, решить которое не сложно

$$a^2 + \frac{F_0}{m}a - \frac{P_{\max}}{\tau m} = 0 \quad\Rightarrow$$
$$a = \sqrt{\left(\frac{F_0}{2m}\right)^2 + \frac{P_{\max}}{\tau m}} - \frac{F_0}{2m} . \qquad (5)$$

Подставляя численные значения, получим необходимые результаты:

при $\tau = 10c \quad a \approx 1{,}9\frac{м}{c}$;

при $\tau = 1{,}0c \quad a \approx 6{,}6\frac{м}{c}$.

3.6 Оценку времени разгона можно получить как отношение изменения скорости $\Delta v = v_{\max} - \eta v_{\max} = v_{\max}(1-\eta)$ к ускорению в начальный момент разгона, которое определяется из уравнения (1)

$$a_0 = \frac{1}{m}\left(\frac{P_{\max}}{v_{\max}} - \left(F_0 + \beta v_{\max}^2\right)\right),$$

Таким образом, получим

$$\boxed{\Delta t \approx \frac{m v_{\max}(1-\eta)}{\frac{P_{\max}}{v_{\max}} - \left(F_0 + \beta v_{\max}^2\right)} \approx 6{,}5c\,.}$$

3.7 Описанное управление действительно возможно при **положительных** значениях коэффициента C. Так если автомобиль движется с требуемой скоростью, то мощность остается постоянной, если по каким-то причинам скорость стала меньше требуемой, то мощность двигателя начнет возрастать, и, наоборот, с ростом скорости мощность будет убывать.

3.8 Качественно динамика изменения скорости и мощности будет иметь вид: Мощность начнет возрастать, скорость также будет расти, когда скорость станет равной требуемой, мощность достигнет максимального значения, после чего начнет убывать, а скорость продолжать расти, возможно несколько периодов таких затухающих колебаний. Чем больше значение параметра управления C, тем резче будут эти колебания, при уменьшении параметра управления выравнивание скорости будет проходить медленнее, но зато без резких колебаний. Оптимальный выбор параметра управления определяется условием: минимальное время установления скорости без ее колебаний (критический режим).