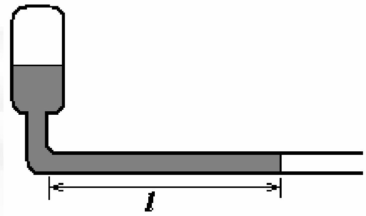
Решение задачи 11.1 «Показательная разминка»

1.1 По второму закону Ньютона ускорение точки постоянно и равно $a = \frac{F}{m}$, при равноускоренном движении пройденный путь зависит от времени по закону $S = \frac{at^2}{2}$.

Поэтому $\boxed{\lambda = 2}$.

1.2 Так как жидкость «вязкая», то можно считать, что в любой момент времени движение жидкости является «установившемся», для которого справедливо уравнение (данное в примечании)



$$v = \frac{dl}{dt} = \kappa \frac{\Delta P}{l}, \qquad (1)$$

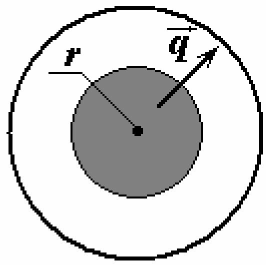
Из этого уравнения следует $ldl = \kappa \Delta P dt$, после интегрирования получаем $\frac{1}{2} l^2 = \kappa \Delta P t$, окончательно получаем $l = \sqrt{2\kappa \Delta P t}$. Таким образом, искомый показатель степени $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$.

Другой способ решения задачи заключается в подстановке функции $l = Ct^{\lambda}$, приведенной в условии в уравнение (1)

$$C\lambda t^{\lambda-1} = \kappa \frac{\Delta P}{C} t^{-\lambda}.$$

Приравнивая показатели степеней переменной t $(\lambda - 1 = -\lambda)$, получаем искомое значение параметра $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким образом, при этом значении приведенная функция удовлетворяет уравнению (1).

1.3 В установившемся режиме вся теплота, выделившаяся внутри планеты, переносится к ее поверхности. Так как система обладает сферической симметрией, то и распределение температур, и тепловые потоки также сферически симметричны. Выделим внутри планеты сферу радиуса r. Из уравнения теплового баланса следует, что суммарный поток теплоты через эту сферу равен количеству теплоты, выделившейся внутри сферы, что может быть записано в виде уравнения (с учетом закона, сформулированного в приложении)

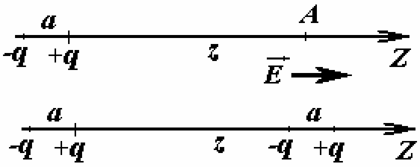


$$\frac{4}{3}\pi r^3 w = -4\pi r^2 \gamma \frac{dT}{dr}. \qquad (1)$$

Это уравнение легко приводится с простому виду $\frac{dT}{dr} = -\frac{w}{3\gamma}r$, решение которого с учетом граничного условия на поверхности (при $r = R$ температура $T = T_0$) имеет вид

$$T - T_0 = -\frac{w}{6\gamma}\left(r^2 - R^2\right) \Rightarrow T = \left(T_0 + \frac{w}{6\gamma}R^2\right) - \frac{w}{6\gamma}r^2 \qquad (2)$$

приведенный в условии, причем искомый показатель степени равен $\boxed{\lambda = 2}$.
Кто не умеет интегрировать, может решить задачу, подставив функцию $T = A + Br^{\lambda}$ в уравнение (1) $\frac{dT}{dr} = B\lambda r^{\lambda - 1} = -\frac{w}{3\gamma}r$. Из этого равенства следует, что приведенная в условии функция удовлетворяет уравнению теплового баланса при $\lambda = 2$ и любом значении параметра A, который может быть найден из граничного условия на поверхности планеты.



1.4 Совместим ось Z с осью диполя, а ее начало определим в точке нахождения диполя. Тогда в точке A, находящейся на расстоянии z, напряженность поля может быть записана в виде

$$E_{дип.}(z) = E_{точ.}(z) - E_{точ.}(z + a) = -\frac{dE_{точ.}}{dz}a, \qquad (1)$$

где $E_{точ.}(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ напряженность поля, создаваемого точечным зарядом, при выводе (1) учтена малость расстояния a между зарядами диполя.
Вычисляя производную, получим

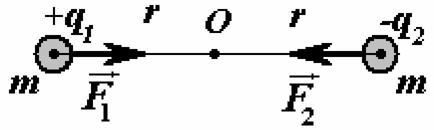
$$E_{дип.}(z) = -\frac{dE_{точ.}}{dz}a = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 z^3}. \qquad (2)$$

Пусть второй диполь находится на расстоянии z в поле, напряженность которого зависит от координаты по закону $E(z)$. Тогда, сила, действующая на этот диполь, может в том же приближении представлена в виде

$$F = qE(z + a) - qE(z) = qa\frac{dE}{dz} = -\frac{3(qa)^2}{4\pi\varepsilon_0 z^4}, \qquad (3)$$

что соответствует приведенной в условии формуле при $\boxed{\lambda = -4}$.
Задача может быть решена и традиционным способом: записать точное выражение для силы взаимодействия пар зарядов, а затем провести разложение по малому параметру –размеру диполя.

1.5 Так как массы шариков равны по условию, а силы, действующие на них равны по третьему закону Ньютона, то шарики будут двигаться навстречу друг другу с равными по



модулю скоростями и столкнуться в средней точке. Когда шарики находится на расстоянии r друг от друга, скорость каждого может быть найдена из закона сохранения энергии

$$2\frac{mv^2}{2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h}\right). \qquad (1)$$

Найти из этого уравнения время сближения сложно (хотя и возможно), однако нам и нет необходимости решать это уравнение – нам необходим вид зависимости времени движения от начального расстояния. Введем собственную систему единиц измерения: расстояния – начальное расстояние h; единицу измерения времени T определим позднее.

Расстояние между частицами и время, измеренные «в новых единицах» обозначим

$$\xi=\frac{r}{h};\quad \tau=\frac{t}{T}.$$

Переходя к новым переменным в уравнении (1), получим

$$\begin{aligned} v&=\frac{dr}{dt}=\frac{hd\xi}{Td\tau};\\ m\left(\frac{hd\xi}{Td\tau}\right)^2&=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\end{aligned}. \qquad (2)$$

Используем теперь «произвол» в выборе единицы измерения времени таким образом, чтобы в этом уравнении не осталось параметров, то есть сделаем его «безразмерным», для чего достаточно положить

$$m\left(\frac{h}{T}\right)^2=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}, \qquad (3)$$

или определить единицу измерения времени как

$$T=\sqrt{\frac{4m\pi\varepsilon_0 h^3}{q^2}}. \qquad (4)$$

В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2=\frac{1}{\xi}-1, \qquad (5)$$

в котором нет никаких исходных параметров. Кроме того, пределы изменения переменной ξ также являются «универсальными» $\xi\in[1,0]$. Следовательно, и его решение – зависимость $\xi(\tau)$ также «универсальна», поэтому и время движения (измеренное в единицах T) является некоторой константой. Обозначим ее τ_0, тогда время движения, измеренной в «обычных» единицах определяется как

$$t_0=\tau_0 T=\tau_0\sqrt{\frac{4m\pi\varepsilon_0 h^3}{q^2}}=Ch^{\frac{3}{2}}. \qquad (6)$$

Таким образом, приведенная формула доказана, а искомый показатель степени равен $\boxed{\lambda=\frac{3}{2}}$.