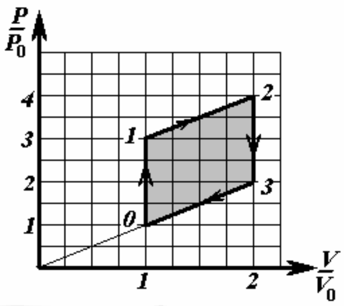
Возможны и другие варианты решения: прямое интегрирование уравнения (1); переход к безразмерным параметрам в уравнении 2 закона Ньютона; проведение аналогии с 3 законом Кеплера и т.д.

Решение задачи 11-2.

Часть 1 .



Построим диаграмму процесса изменения состояния рабочего газа. Обозначим площадь поперечного сечения рабочего цилиндра S, а жесткость пружины k.

Последовательно рассмотрим все узловые состояния и процессы рабочего газа. Конечно, коэффициент полезного действия машины можно подсчитать как отношение работы (численно равной площади цикла) к количеству полученной теплоты. Однако, учитывая, что нам необходимо найти и среднюю мощность, вычислим сразу и теплоты, получаемые от нагревателя и отданные холодильнику на каждом этапе.

Состояние 0.

В начальном состоянии параметры газа следующие:

- объем $V_0 = l_0 S$;

- давление обусловлено силой упругости пружины

$$P_0 = \frac{kl_0}{S} = \frac{F_0}{S};$$

- температура находится из уравнения состояния идеального газа (ν - количество молей рабочего газа)

$$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = \frac{kl_0^2}{\nu S} = \frac{F_0 l_0}{\nu R}. \qquad (1)$$

Состояние 1.

После включения нагревателя температура и давления газа начнут расти до тех пор, пока сила давления газа на поршень окажется в состоянии сдвинуть поршень вправо (состояние ***1***). В этот момент объем еще останется прежним

$$V_1 = V_0 = l_0 S,$$

давление газа станет равным

$$P_1 = \frac{kl_0 + F_1}{S} = \frac{(n+1)F_0}{S} = 3\frac{F_0}{S},$$

а температура

$$T_1 = \frac{P_1 V_0}{\nu R} = \frac{(kl_0 + F_1)l_0}{\nu S} = \frac{(n+1)F_0 l_0}{\nu R} = 3\frac{F_0 l_0}{\nu R}. \qquad (2)$$

Процесс 0 – 1.

Таким образом, процесс $(0 \to 1)$ является **изохорным**, в его ходе газ получит количество теплоты, равное

$$Q_{0\to1} = \nu C_V\left(T_1 - T_0\right) = \nu \frac{5}{2} R = \frac{5}{2} n F_0 l_0 = 5F_0 l_0 . \tag{3}$$

При постоянной мощности нагревателя этот процесс будет протекать в течении промежутка времени

$$\tau_1 = \frac{Q_{0\to1}}{q_1} = \frac{5}{2} n \frac{F_0 l_0}{q_1} = 5\frac{F_0 l_0}{q_1} . \tag{4}$$

При дальнейшем нагреве поршень будет смещаться вправо.

Состояние 2.

В конечной точке расширения, когда объем станет равным

$V_2 = l_1 S = m l_0 S = 2 l_0 S$,

давление достигнет значения

$$P_2 = \frac{k l_1 + F_1}{S} = \frac{k m l_0 + n F_0}{S} = \frac{(m+n)F_0}{S} = 4\frac{F_0}{S}, \tag{6}$$

а температура станет равной

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n) m F_0 l_0}{\nu R} = 8\frac{F_0 l_0}{\nu R} . \tag{7}$$

Процесс 1 – 2.

Пусть поршень находится в некоторой промежуточной точке с координатой x, в этом состоянии объем газа будет равен $V(x) = xS$. Считая процесс равновесным и пренебрегая инерционностью системы, давление газа можно записать в виде

$$P(x) = \frac{kx + F_1}{S}, \tag{8}$$

то есть зависимость давления от объема является линейной.

Работа, совершенная газом в процессе расширения, численно равна площади под графиком процесса на рассматриваемом участке $(1 \to 2)$

$$\begin{aligned} A_{1\to2} &= \frac{P_1 + P_2}{2}\cdot\left(V_2 - V_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(m+n)F_0}{S} + \frac{(n+1)F_0}{S}\right)(m-1) l_0 S = \\ &= \frac{(m+2n+1)(m-1)}{2} F_0 l_0 = 3{,}5 F_0 l_0 \end{aligned} . \tag{9}$$

Изменение внутренней энергии рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} \Delta U_{1\to2} &= \nu C_v\left(T_2 - T_1\right) = \nu \frac{5}{2} R\left(\frac{(m+n) m F_0 l_0}{\nu R} - \frac{(n+1) F_0 l_0}{\nu R}\right) = \\ &= \frac{5}{2} F_0 l_0 \left((m+n)m - (n+1)\right) = 12{,}5 F_0 l_0 \end{aligned} \tag{10}$$

Количество теплоты, полученной в ходе процесса $(1 \to 2)$, рассчитывается с помощью первого закона термодинамики

$$Q_{1\to2} = \Delta U_{1\to2} + A_{1\to2} = \frac{1}{2} F_0 l_0 (6m + 7n + 6)(m-1) = 16 F_0 l_0 . \tag{11}$$

Соответственно, время этого процесса

$$\tau_2 = \frac{Q_{1\to2}}{q} = \frac{F_0 l_0}{2q}(6m + 7n + 6)(m-1) = 16\frac{F_0 l_0}{q} . \tag{12}$$

Состояние 3.

После отключения нагревателя и включения холодильника газ начнет охлаждаться при неизменном объеме $V_3 = ml_0 S$, до тех пор, сила давления газа не станет меньше силы упругости возвращающей пружины, то есть до значения

$$P_3 = \frac{mkl_0}{S} = m\frac{F_0}{S} = 2\frac{F_0}{S}. \quad (13)$$

Температура при этом станет равной

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{\nu R} = m^2\frac{F_0 l_0}{\nu R} = 4\frac{F_0 l_0}{\nu R}. \quad (14)$$

Процесс 2-3.

Процесс остывания является изохорным (при этом работа равна нулю $A_{2\to3} = 0$), количество отданной теплоты равно уменьшению внутренней энергии

$$\Delta U_{2\to3} = Q_{2\to3} = \frac{5}{2}\nu C_V\left(T_2 - T_3\right) = \frac{5}{2}F_0 l_0 mn = 10F_0 l_0 \quad (15)$$

и пройдет за время

$$\tau_3 = \frac{Q_{2\to3}}{q} = \frac{5F_0 l_0}{2q}mn = 10\frac{F_0 l_0}{q}. \quad (16)$$

Процесс 3-4.

Так как газ сжимается под действием пружины, то его давление определяется силой упругости пружины

$$P = \frac{kx}{S}. \quad (17)$$

Характеристики этого процесса рассчитываются стандартным методом:

- изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{3\to0} = \frac{5}{2}\nu C_V\left(T_0 - T_3\right) = -\frac{5}{2}F_0 l_0\left(m^2 - 1\right) = -7{,}5F_0 l_0; \quad (18)$$

- работа, совершенная газом,

$$A_{3\to0} = \frac{P_3 + P_0}{2}\cdot\left(V_0 - V_3\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{mF_0}{S} + \frac{F_0}{S}\right)(m-1)l_0 S = -\frac{\left(m^2 - 1\right)}{2}F_0 l_0 = -1{,}5F_0 l_0; \quad (19)$$

- количество отданной теплоты

$$Q_{3\to0} = \frac{\left(m^2 - 1\right)}{2}F_0 l_0 + \frac{5}{2}\left(m^2 - 1\right)F_0 l_0 = 3\left(m^2 - 1\right)F_0 l_0 = 9F_0 l_0; \quad (20)$$

- время протекания процесса

$$\tau_4 = 3\left(m^2 - 1\right)\frac{F_0 l_0}{q} = 9\frac{F_0 l_0}{q}. \quad (21)$$

Коэффициент полезного действия двигателя рассчитаем по формуле

$$\boxed{\eta = \frac{A_\Sigma}{Q_{0\to1} + Q_{1\to2}} = \frac{2n(m-1)}{5n + (6m + 7n + 6)(m-1)} = \frac{2}{21} \approx 0{,}095. \quad (22)}$$

Заметим, что в данном случае работа газа над поршнем равна работе рабочего устройства, которая в свою очередь легко может быть рассчитана как произведение перемещения поршня на силу, которая действует со стороны поршня на рабочее устройство

$$A = nF_0(m-1)l_0 = n(m-1)F_0 l_0 = 2F_0 l_0 . \qquad (23)$$

Во всех остальных случаях «полезная» работа также будет определяться этой формулой, но не будет равна работе газа за цикл.

Среднюю мощность двигателя рассчитаем как отношение полезной работы к периоду цикла

$$\boxed{N = \frac{A}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4} = \frac{q}{20} . \qquad (24)}$$

Для удобства представим параметров газа во всех узловых состояниях в таблице 1, а характеристики процессов в таблице 2.

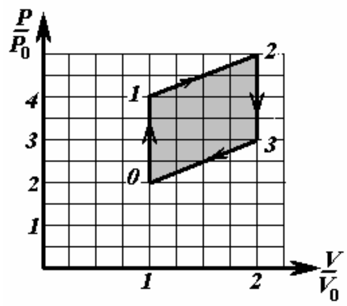
Таблица 1.

	Объем	**Давление**	**Температура**
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \frac{kl_0}{S} = \frac{F_0}{S}$	$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = \frac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \frac{(n+1)F_0}{S} = 3\frac{F_0}{S}$	$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{(n+1)F_0 l_0}{\nu R} = 3\frac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = ml_0 S$	$P_2 = \frac{(m+n)F_0}{S} = 4\frac{F_0}{S}$	$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n)mF_0 l_0}{\nu R} = 8\frac{F_0 l_0}{\nu R}$
3	$V_3 = ml_0 S$	$P_3 = m\frac{F_0}{S} = 2\frac{F_0}{S}$	$T_3 = \frac{P_3 V_3}{\nu R} = m^2\frac{F_0 l_0}{\nu R} = 4\frac{F_0 l_0}{\nu R}$

Таблица 2.

	Тип процесса	ΔU	A	Q	Время
0-1	$V = const$	$5F_0 l_0$	0	$5F_0 l_0$	$5\frac{F_0 l_0}{q}$
1-2	$P(x) = \frac{kx + F_1}{S}$	$12{,}5F_0 l_0$	$3{,}5F_0 l_0$	$16F_0 l_0$	$16\frac{F_0 l_0}{q}$
2-3	$V = const$	$-10F_0 l_0$	0	$-10F_0 l_0$	$10\frac{F_0 l_0}{q}$
3-0	$P(x) = \frac{kx}{S}$	$-7{,}5F_0 l_0$	$-1{,}5F_0 l_0$	$-9F_0 l_0$	$9\frac{F_0 l_0}{q}$
всего		0	$2F_0 l_0$	$2F_0 l_0$	$40\frac{F_0 l_0}{q}$

Часть 2.



С учетом атмосферного давления «картинка цикла» поднимется на единицу вверх по шкале $\left(\frac{P}{P_0}\right)$, что приведет к увеличению теплоты, которую сообщает газу нагреватель. Газ, по-прежнему, получает теплоту от нагревателя на участках изохорического процесса $(0 \to 1)$ и процесса расширения $(1 \to 2)$.

Расчет параметров газа в узловых точках процесса аналогичен проведенному выше, поэтому приведем его без комментариев и дадим в виде таблицы 3.

Таблица 3.

	Объем	Давление	Температура
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \frac{kl_0 + P_{атм}}{S} = 2\frac{F_0}{S}$	$T_0 = \frac{P_0 V_0}{\nu R} = 2\frac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \frac{(n+2)F_0}{S} = 4\frac{F_0}{S}$	$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{(n+2)F_0 l_0}{\nu R} = 4\frac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = ml_0 S$	$P_2 = \frac{(m+n+1)F_0}{S} = 5\frac{F_0}{S}$	$T_2 = \frac{P_2 V_2}{\nu R} = \frac{(m+n+1)mF_0 l_0}{\nu R} = 10\frac{F_0 l_0}{\nu R}$

Согласно первому закону термодинамики это количество теплоты равно

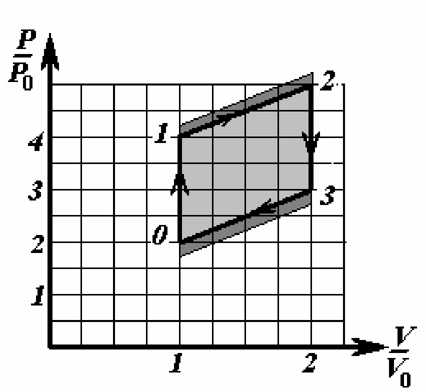
$$Q_{0\to 2} = \Delta U_{0\to 2} + A_{1\to 2} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_0) + \frac{P_1 + P_2}{2}(V_2 - V_1) = 24{,}5 F_0 l_0 \qquad (25)$$

Соответственно, коэффициент полезного действия равен

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_{0\to 2}} = \frac{2}{24{,}5} \approx 0{,}082,} \qquad (26)$$

что меньше, чем в «идеальном» случае.

Часть 3.



При учете силы трения к рассмотренному циклу добавятся две узкие «полоски», иллюстрирующие преодоление этих сил, что приведет к увеличению теплоты, сообщаемой нагревателем.

Следует особо отметить, что на этапе расширения сила трения приводит к увеличению давления газа, а на участке сжатия к его уменьшению.

Значения характеристик газа для данного цикла представлены в таблице 3.

Таблица 3.

	Объем	Давление	Температура
0	$V_0 = l_0 S$	$P_0 = \dfrac{kl_0 + P_{атм} - F_{тр}}{S} = 1{,}9\dfrac{F_0}{S}$	$T_0 = \dfrac{P_0 V_0}{\nu R} = 1{,}9\dfrac{F_0 l_0}{\nu R}$
1	$V_1 = l_0 S$	$P_1 = \dfrac{(n+2)F_0 + F_{тр}}{S} = 4{,}1\dfrac{F_0}{S}$	$T_1 = \dfrac{P_1 V_1}{\nu R} = \dfrac{(n+2{,}1)F_0 l_0}{\nu R} = 4{,}1\dfrac{F_0 l_0}{\nu R}$
2	$V_2 = ml_0 S$	$P_2 = \dfrac{(m+n+1)F_0 + F_{тр.}}{S} = 5{,}1\dfrac{F_0}{S}$	$T_2 = \dfrac{P_2 V_2}{\nu R} = \dfrac{(m+n+1{,}1)mF_0 l_0}{\nu R} = 10{,}2\dfrac{F_0 l_0}{\nu R}$

Расчет количества полученной теплоты имеет вид

$$Q_{0\to 2} = \Delta U_{0\to 2} + A_{1\to 2} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_0) + \frac{P_1 + P_2}{2}(V_2 - V_1) = \\ = \frac{5}{2}F_0 l_0 \cdot 8{,}3 + \frac{1}{2}F_0 l_0 \cdot 9{,}2 = 25{,}35 F_0 l_0 \qquad (28)$$

Следовательно, коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A}{Q_{0\to 2}} = \frac{2}{25{,}35} \approx 0{,}079 \qquad (29)$$

Как видно, значение К.П.Д. почти совпадает с предыдущим значением. Поэтому можно провести приближенный расчет. Найдем, насколько увеличится количество полученной газом теплоты $\delta Q_{0\to 2}$ из-за наличия трения. Имеется две причины увеличения этой теплоты: во-первых, увеличение изменения температуры (начальная температура чуть ниже на величину $\delta T_0 = \dfrac{F_{тр.} l_0}{\nu R}$, а конечная чуть выше $\delta T_2 = \dfrac{mF_{тр.} l_0}{\nu R}$); во-вторых, незначительно увеличивается давление в процессе расширения $\delta P_{1\to 2} = \dfrac{F_{тр.} l_0}{S}$.

Поэтому

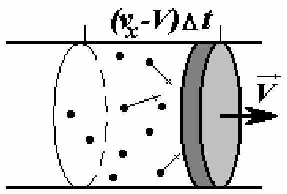
$$\delta Q_{0\to 2} = C_V(\delta T_0 + \delta T_2) + \delta P_{1\to 2}\Delta V = \frac{5}{2}(m+1)\frac{F_{тр.}}{F_0}F_0 l_0 + (m-1)\frac{F_{тр.}}{F_0}F_0 l_0 = \\ = 7{,}5\frac{F_{тр.}}{F_0}F_0 l_0 = 0{,}75 F_0 l_0,$$

Теперь изменение К.П.Д. можно рассчитать по формулам

$$\eta + \delta\eta = \frac{A}{Q_{0\to 2} + \delta Q_{0\to 2}} \approx \frac{A}{Q_{0\to 2}}\left(1 - \frac{\delta Q_{0\to 2}}{Q_{0\to 2}}\right) \Rightarrow$$
$$\delta\eta = -\eta\frac{\delta Q_{0\to 2}}{Q_{0\to 2}} = -\frac{0{,}082 \cdot 0{,}75}{24{,}5} \approx -0{,}0025 = -0{,}2\% \qquad (30)$$

Часть 4

4.1 Основной причиной того, что поршень перестанет ускорятся, является то обстоятельство, что давление газа на движущийся поршень отличается от давления на неподвижную преграду.



Найдем, какое давление оказывает газ на поршень, движущийся с постоянной скоростью V, используя традиционные методы МКТ. Будем считать, что скорость движения поршня V, значительно меньше средней скорости теплового движения молекул. Молекула, имеющая проекцию скорости v_x (нормальную к поверхности), при ударе передает поршню импульс

$$\Delta p_x = 2m(v_x - V). \qquad (1)$$

Число молекул, имеющих скорость близкую к v_x и достигших поршня за время Δt, равно

$$\Delta n = n(v_x - V)S\Delta t. \qquad (2)$$

Для вычисления давления необходимо провести усреднение по возможным значениям скоростей молекул

$$P = \left\langle \frac{\Delta p_x \Delta n}{S\Delta t} \right\rangle = 2mn\left\langle (v_x - V)^2 \right\rangle \approx 2mn\left(\left\langle v_x^2\right\rangle - 2V\left\langle v_x\right\rangle\right) =$$
$$= 2mn\left\langle v_x^2\right\rangle\left(1 - 2\frac{V\left\langle v_x\right\rangle}{\left\langle v_x^2\right\rangle}\right) \approx P_0\left(1 - 2\frac{V\left\langle v_x\right\rangle}{\left\langle v_x^2\right\rangle}\right), \qquad (3)$$

причем усреднение необходимо проводить по молекулам, нормальные составляющие скоростей которых лежат в интервале $v_x \in [V, +\infty]$.

Для оценки средних величин, стоящих в выражении (3), примем, что средняя проекции скорости примерно равна среднеквадратичному, а средний квадрат проекции легко определяется из формулы для среднего квадрата модуля скорости. Поэтому

$$\left\langle v_x^2\right\rangle \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left\langle v^2\right\rangle\right) = \frac{1}{2}\frac{kT}{m}$$
$$\left\langle v_x\right\rangle \approx \sqrt{\left\langle v_x^2\right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{kT}{m}} == \sqrt{\frac{1}{2}\frac{RT}{M}},$$

таким образом, давление газа на движущийся поршень определяется выражением

$$P \approx P_0\left(1 - 2\frac{V\left\langle v_x\right\rangle}{\left\langle v_x^2\right\rangle}\right) \approx P_0\left(1 - 2V\sqrt{\frac{2M}{RT}}\right) = P_0(1 - \beta V), \qquad (4)$$

где коэффициент пропорциональности равен

$$\beta \approx 2\sqrt{\frac{2M}{RT}}\,. \tag{5}$$

Заметим, что более точный расчет с корректным вычислением средних приводит к результату $\beta = 2\frac{\langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{M}{RT}} \approx 1{,}6\sqrt{\frac{M}{RT}}$.

Поршень будет двигаться с постоянной скоростью, когда силы давления газа на обе стороны поршня сравняются. В этом случае справедливо уравнение

$$(P+\Delta P)(1-\beta\bar{v}) = P(1+\beta\bar{v}), \tag{6}$$

из которого определяем скорость движения поршня

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\Delta P}{2\beta P} = \frac{\Delta P}{P}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{RT}{2M}} \approx 0{,}13\,\frac{м}{с}\,.} \tag{7}$$

4.2 Мы показали, что сила давления на «убегающий» поршень меньше среднего давления газа. Следовательно, для того чтобы в рассматриваемом двигателе поршень перемещался, необходимо увеличить среднее давление газа. Требуемое увеличение давления определяется из формулы (4)

$$\delta P \approx \beta P \bar{v} . \tag{1}$$

Такое увеличение потребует увеличения количества теплоты, потребляемой от нагревателя, это увеличение оценивается также, как и при учете силы трения

$$\delta Q_{0\to 2} = \frac{5}{2}\nu R \frac{2l_0 S\delta P}{\nu R} + \delta P(m-1)l_0 S \approx Q_{0\to 2}\frac{\delta P}{P} . \tag{2}$$

Соответственно уменьшается коэффициент полезного действия двигателя

$$\boxed{\delta\eta = -\eta\frac{\delta Q_{0\to 2}}{Q_{0\to 2}} = -\eta\frac{\delta P}{P} = \eta\beta\bar{v} \approx -0{,}005 = -0{,}5\% . \qquad (3)}$$

<u>Добавление, не входящее в основное решение.</u> .

Вычисление коэффициента β .

Расчет проведен с точностью до первой степени скорости движения поршня

$$\left\langle v_x^2\right\rangle = \int_V^\infty v_x^2\varphi(v_x)dv_x = \int_0^\infty v_x^2\varphi(v_x)dv_x - \int_0^V v_x^2\varphi(v_x)dv_x \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\varphi(v_x)dv_x - \frac{1}{2}\left(\left[v_x^2\varphi(v_x)\right]_0 + \left[v_x^2\varphi(v_x)\right]_V\right)V =$$

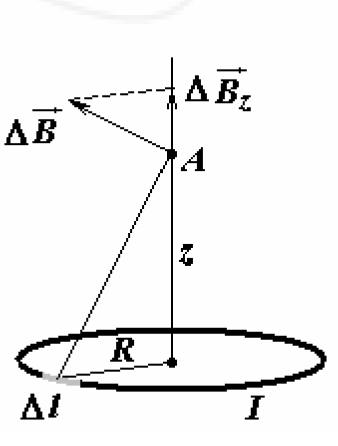
$$= \frac{1}{6}\left\langle v^2\right\rangle - \frac{1}{2}V^3\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \approx \frac{1}{2}\frac{kT}{m}$$

$$\left\langle v_x\right\rangle = \int_V^\infty v_x\varphi(v_x)dv_x = \int_0^\infty v_x\varphi(v_x)dv_x - \int_0^V v_x\varphi(v_x)dv_x = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

$$\beta = 2\frac{\left\langle v_x\right\rangle}{\left\langle v_x^2\right\rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{M}{RT}} \approx 1{,}6\sqrt{\frac{M}{RT}}$$

Решение 11-3

<u>Часть 1. «Магнитное поле»</u>



1.1 Для определения индукции на оси кольца (обозначим ось Z) следует воспользоваться законом Био-Саварра-Лапласа. Выделим на кольце небольшой элемент длиной Δl, который создает в точке A магнитное поле индукции $\Delta\vec{B}$. Из симметрии системы следует, что суммарный вектор индукции направлен вдоль оси системы. Поэтому для его