Гродно, 2005г. (Решения)

Задание 1. «Сосуд Мюнхгаузена»

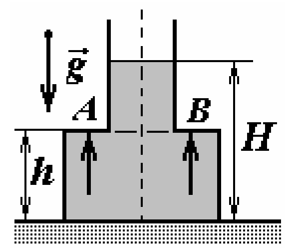

Рис. 20

Давление $p_{AB} = \rho g(H-h)$ столба жидкости на уровне AB (рис. 20) в сосуде согласно закону Паскаля передается по всем направлениям без изменений. Следовательно, сила давления $\vec{F}_Д$ жидкости на горизонтальные части A и B сосуда Мюнхгаузена площадью $S = \pi(R^2 - r^2)$ направлена вверх и равна

$$F_Д = \pi\rho g(H-h)(R^2-r^2). \qquad (1)$$

Поскольку при такой высоте H жидкость приподнимает сосуд, то справедливо равенство

$$mg = \pi\rho g(H-h)(R^2-r^2). \qquad (2)$$

Из (2) получаем

$$m = \pi\rho(H-h)(R^2-r^2). \qquad (3)$$

Расчет дает

$$\boxed{m = 1{,}6\,\text{кг}}. \qquad (4)$$

Задание 2. «Дробь Мюнхгаузена»

2.1 Поскольку силой сопротивления воздуха можно пренебречь, то дробинка будет свободно падать с башни высотой h с ускорением свободного падения g без начальной скорости. Для этого ей потребуется время

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (1)$$

Поскольку температура свинца во время кристаллизации остается постоянной, то при радиусе дробинки r за время полета (см. подсказку) она отдаст в окружающее пространство количество теплоты

$$Q = \alpha(T-T_0)St = \alpha(T-T_0)4\pi r^2 t, \qquad (2)$$

где T — температура плавления свинца, T_0 — температура окружающей среды. С другой стороны это количество теплоты может быть найдено из условия полной кристаллизации свинца за время полета

$$Q = m\lambda = \rho V\lambda = \rho\frac{4}{3}\pi r^3\lambda, \qquad (3)$$

где ρ и λ — соответственно плотность и удельная теплота кристаллизации (плавления) свинца.

Приравнивая выражения (2) и (3), с учетом (1) найдем

$$h = \frac{g}{18}\left(\frac{\rho\lambda}{\alpha(T-T_0)}\right)^2 r^2. \qquad (4)$$

Повторяя подобные рассуждения для «крупной» дроби, получим

$$H = \frac{g}{18}\left(\frac{\rho\lambda}{\alpha(T-T_0)}\right)^2 R^2. \qquad (5)$$

Разделив (5) на (4), окончательно найдем

$$\boxed{H = \frac{R^2}{r^2}h = \left(\frac{R}{r}\right)^2 h = 200\,\text{м} = 2{,}0\cdot 10^2\,\text{м}}. \tag{6}$$

2.2 При описании падения «дробинки» с учетом силы сопротивления воздуха, заметим, что ее скорость $\upsilon(t)$ будет расти с переменным ускорением до некоторого установившегося значения u, а далее падение будет равномерным.

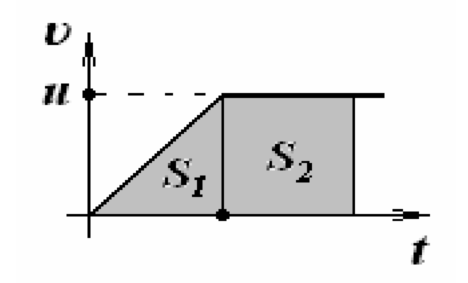

Рис. 21

Для оценки высоты башни H в этом случае примем, что характер зависимости скорости дробинки от времени $\upsilon(t)$ имеет вид, представленный на рис. 21, т.е. состоит из участка равноускоренного движения длиной S_1 и участка равномерного движения длиной S_2. Соответственно

$$S_1 + S_2 = H, \tag{7}$$

где $S_1 = \frac{u^2}{2g}$, $S_2 = u(t - \frac{u}{g})$, t — искомое время падения с башни высотой H в рамках данной модели. С учетом этого получаем

$$t = \frac{H}{u} + \frac{u}{2g}. \tag{8}$$

По условию задачи за время полета t капля должна полностью кристаллизоваться. Из уравнения теплового баланса в этом случае имеем

$$\alpha(T - T_0)4\pi r^2 t = \alpha(T - T_0)4\pi r^2\left(\frac{H}{u} + \frac{u}{2g}\right) = m\lambda = \rho V\lambda = \rho\frac{4}{3}\pi r^3\lambda. \tag{9}$$

Из (9) найдем связь между высотой башни H и описанными параметрами

$$H = \frac{\rho\lambda r u}{3\alpha(T - T_0)} - \frac{u^2}{2g}. \tag{10}$$

Как следует из (10), одним из параметров, определяющих высоту башни является скорость u установившегося падения капли. Для ее нахождения воспользуемся II законом Ньютона, согласно которому в этом состоянии сила тяжести должна быть равна по модулю силе сопротивления воздуха

$$mg = \frac{C_x}{2}\rho_0 u^2 \pi r^2. \tag{11}$$

Из (11) с учетом того, что масса капли

$$m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

найдем

$$u = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{\rho g r}{C_x \rho_0}}. \tag{12}$$

Используя выражения (10) - (12), для высоты башни H_2, необходимой для производства «крупной» дроби радиусом r_2, получим

$$H_2 = \frac{r_2 u_2}{r_1 u_1}\left(H_1 + \frac{u_1^2}{2g}\right) - \frac{u_2^2}{2g}. \tag{13}$$

Вычисляя с помощью (12) скорости $u_1 = 19{,}9\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ и $u_2 = 28{,}3\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ и подставляя полученные значения в (14), окончательно найдем

$$H_2 = 1{,}6\cdot 10^2\ \text{м}\,. \qquad (14)$$

Из сравнения (14) и (6) видим, что численное значение для высоты башни стало меньше в случае «равноускоренно-равномерного» движения. Это нисколько не удивительно, т.к. сила сопротивления воздуха создает «парашютный эффект», увеличивая время падения капли с данной высоты (средняя скорость падения уменьшается). Таким образом, капля успевает кристаллизоваться и при падении с меньшей высоты, чем в случае только равноускоренного движения.

В заключение заметим, что выражение (10) не имеет смысла при больших значениях u, поскольку при этом высота башни H получается отрицательной. Это имеет очевидный физический смысл — в нашей модели высота башни изначально предполагалась достаточной для того, чтобы капля «успела» разогнаться до постоянной скорости u. В противном случае будет отсутствовать участок равномерного движения капли. Сформулируем критерий достаточности количественно

$$H \ge H^* = S_1\,. \qquad (15)$$

<u>Задание 3. «Храбрый Мюнхгаузен»</u>

После начала действия внешней силы правый груз m (следовательно и вся система) некоторое время t_1 будет оставаться в покое, поскольку сила трения покоя между плоскостью и грузом сможет компенсировать внешнюю движущую силу $F(t)$.

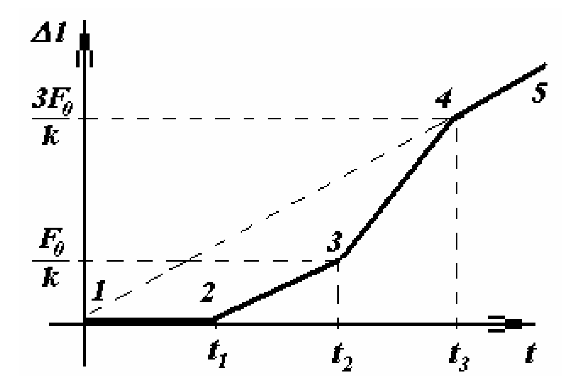

Рис. 22

Соответственно этот этап «покоя» (участок $1-2$ на рис.22) прекратится, когда внешняя сила достигнет максимального значения силы трения покоя $F_0 = \mu mg$ (явлением застоя пренебрежем)

$$\alpha t_1 = \mu mg = F_0 \ \Rightarrow\ t_1 = \frac{F_0}{\alpha} = 20\,c\,. \qquad (1)$$

Таким образом, спустя время t_1 после начала действия силы правый груз начнет скользить медленно скользить по плоскости, растягивая при этом правую (первую) пружину.

Будем считать, что при подобном «медленном» скольжении груз в любой момент времени находится в равновесии под действием постоянной силы трения скольжения F_0 и переменной силы упругости первой пружины $F_{y1}(t) = k\,\Delta l_1(t)$

$$\alpha t = F_0 + k\Delta l_1(t) \ \Rightarrow\ \Delta l_1(t) = \frac{\alpha t - F_0}{k}\,. \qquad (2)$$

Поскольку (2) представляет собой уравнение прямой, то на этом этапе (участок $2-3$ на рис.21) абсолютная деформация системы $\Delta l(t) = \Delta l_1(t)$ будет линейно увеличиваться со временем. Этот этап продолжится до момента времени t_2, когда в движение придет средний груз, т.е. когда сила упругости правой пружины превысит величину F_0

$$k\,\Delta l_1(t_2) = F_0 \ \Rightarrow (2) \Rightarrow\ \alpha t_2 - F_0 = F_0 \ \Rightarrow\ t_2 = \frac{2F_0}{\alpha} = 39\,c \qquad (3)$$