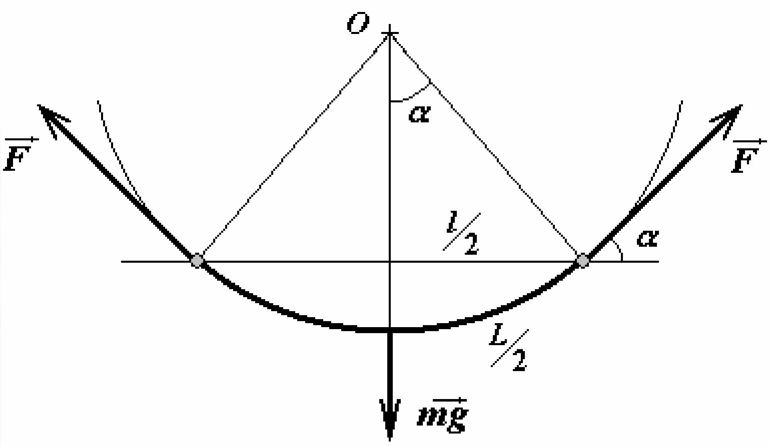
10 класс.

Задача 10.1.1

Условие равновесия цепи в проекции на вертикальное направление имеет вид

$$2F\sin\alpha = mg, \tag{1}$$

где F - сила натяжения цепи в крайних точках и равная ей сила, с которой надо удерживать веревку. Для определения угла α между касательной к цепи и горизонтом необходимо знать форму, которую принимает цепь под действием силы тяжести. Решение этой проблемы известно, но достаточно сложно. В данном случае расстояние между концами цепи немного меньше ее длины. Поэтому цепь изогнута слабо, ее профиль можно аппроксимировать кривой второго порядка – проще всего дугой окружности. В этом приближении найти угол α не составляет труда. Проведя перпендикуляры к касательным в крайних точках, определим центр окружности O как точку их пересечения. Теперь длина участка цепи между нижней и крайней точками (она равна половине длины всей цепи $\frac{L}{2}$) выражается формулой



$$\frac{L}{2} = R\alpha, \tag{2}$$

а длина половины хорды

$$\frac{l}{2} = R\sin\alpha \approx R\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right) \tag{3}$$

где использована приближенная формула для синуса малого угла.

Отметим, что в линейном приближении различие между длиной дуги и стягивающей ее хорды отсутствует, поэтому необходимо использовать приближение следующего порядка.

Из формул (3) –(2) получаем соотношение

$$\frac{l}{L} = 1 - \frac{\alpha^2}{6}. \tag{4}$$

Обозначим $l = (1-\eta)L$, где η - малый безразмерный параметр, согласно условию задачи $\eta = 0{,}10$. С использованием этого удобного обозначения значения искомого угла определяется формулой

$$\alpha \approx \sqrt{6\eta}. \tag{5}$$

Теперь из формулы (1) определяем значение силы

$$F = \frac{mg}{2\sin\alpha} \approx \frac{mg}{2\sqrt{6\eta}} \approx 32H, \tag{6}$$

что больше половины веса веревки.

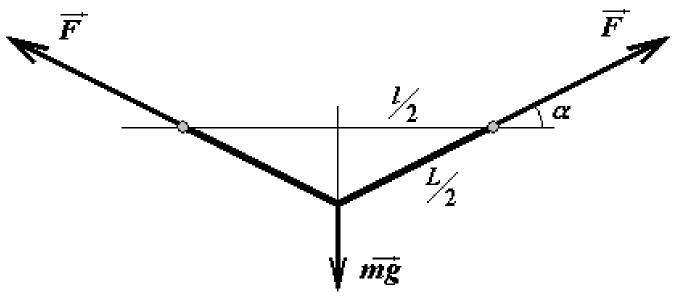
Для того чтобы оценить работу по выпрямлению веревки можно проинтегрировать выражение для силы в зависимости от параметра η (учитывая, что $x=(1-\eta)L, \qquad dx=-Ld\eta$)

$$A=\int_{l}^{L}Fdx=L\int_{0}^{\eta_0}Fd\eta=\frac{mgL}{2\sqrt{6}}\int_{0}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}=\frac{mgL\sqrt{\eta_0}}{\sqrt{6}}\approx 30\,Дж\,.$$

<u>Дополнения.</u>

1. Отметим, что для полного выпрямления веревки необходимо приложить бесконечно большую силу: из формулы (6) следует, что при $\eta\to 0 \quad F\to\infty$. Тем не менее, работа, совершенная при выпрямлении веревки, конечна.

2. Задача может быть решена и в более грубом приближении: если форму веревки считать в виде двух отрезков прямой линии.



В этом приближении зависимость угла наклона приложенной к веревке силы определяется из очевидного выражения $\cos\alpha=\frac{l}{L}=1-\eta$.

Так как угол наклона мал, то допустимо использовать приближенную формулу $\cos\alpha\approx 1-\frac{\alpha^2}{2}$. Тогда искомый угол описывается формулой $\alpha\approx\sqrt{2\eta}$, которая с точностью до постоянного коэффициента совпадает с использованной в решении формулой (5). Отличие между этими выражениями менее, чем в два раза, поэтому обе полученные оценки можно считать вполне приемлемыми.

Задача 10.1.2

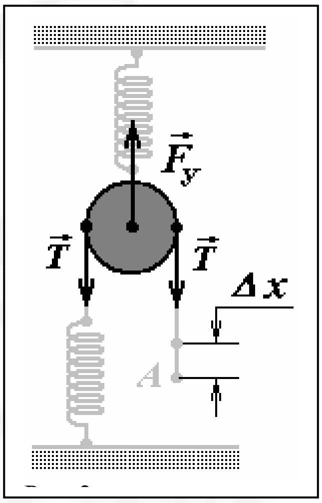
Если мысленно заменить верхнюю пружину нерастяжимой веревкой, то под действием силы $\vec{F}$, направленной вниз, нить через гладкий блок растянет нижнюю пружину вверх на величину

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k}.$$

Поскольку нить нерастяжима, то на такую же величину Δx_1 опустится конец A веревки.

Из условия равновесия конца A веревки следует, что сила натяжения нити при этом $T = F$.

Теперь «вернем» верхнюю пружину на место, ведь по условию задачи блок «подвижный». На блок вниз действуют две силы натяжения нити T (Рис. 2), а вверх — сила упругости $\vec{F}_y$ верхней пружины. Из условия равновесия блока получим



$$F_y = k\Delta x_2 = 2T = 2F \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = \frac{2F}{k},$$

где Δx_2 — абсолютная деформация верхней пружины. Следовательно, в положении равновесия нижний конец верхней пружины (центр блока) опустится на Δx_2.

Поскольку при опускании центра блока на Δx_2 «освободится» участок нити длиной $2\Delta x_2$, то результирующее смещение Δx вниз конца нити A с учетом деформаций обеих пружин составит

$$\Delta x = \Delta x_1 + 2\Delta x_2 = \frac{F}{k} + 2\frac{2F}{k} = 5\frac{F}{k}.$$

Для касания веревкой земли должно быть выполнено условие

$$\Delta x = h \quad \Rightarrow \quad \frac{5F}{k} = h \quad \Rightarrow \quad F = \frac{kh}{5}.$$

Расчет дает

$$F = \frac{kh}{5} = 10\,\text{Н}. \qquad (1)$$

Поскольку при меньшем значении силы F конец A веревки не дотянет до земли (колебания в системе отсутствуют), то (1) дает искомое значение $\vec{F}_{\min}$

$$F_{\min} = \frac{kh}{5} = 10\,\text{Н}.$$

Дополнение.

Решение данной задачи можно сделать и покороче. Обозначим Δx_1 - деформацию нижней пружины. Тогда из условия равновесия блока и закона Гука следует, что деформация верхней пружины должна быть в два раза больше $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$. Далее из условия не растяжимости веревки, переброшенный через блок, следует, что ее конец опустится на расстояние $h = 2\Delta x_2 + \Delta x_1 = 5\Delta x_1$. Наконец, искомая сила натяжения веревки равна силе упругости нижней пружины, то есть

$$F = k\Delta x_1 = \frac{kh}{5}.$$

Впрочем, эти элементарные выкладки нуждаются в физических обоснованиях, приведенных в основном решении.

Задача 10.1.3

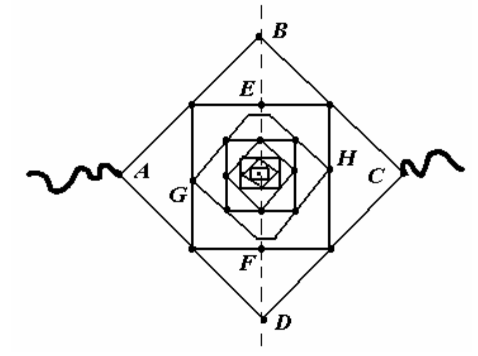


Рис. 2

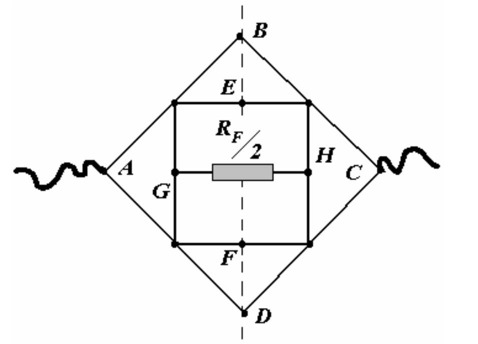


Рис. 3

Поскольку электрическое сопротивление $R = \rho \frac{l}{S}$ пропорционально длине l проводника, то можем заметить, что сопротивление R_{i+1} каждого следующего вложенного квадрата меньше сопротивления R_i предыдущего в $\sqrt{2}$ раз

$$R_{i+1} = \frac{R_i}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Преобразуем цепь, разорвав ее в эквипотенциальных точках E и F (Рис.2), лежащих на оси симметрии BD фрактала. Это не изменит искомого сопротивления R_F фрактала, поскольку по «разорванным» малым перемычкам ток все равно не идет из-за отсутствия напряжения на них.

Однако теперь можем заметить, что цепь между точками G и H (см. рис. 2) также представляет собой бесконечный фрактал, начальный размер которого ровно в два раза меньше размера исходного фрактала.

Следовательно, в силу (1) (примененного дважды!), сопротивление R_{GH} цепи между указанными точками также в два раза меньше искомого сопротивления «большого» фрактала

$$R_{GH} = \frac{R_F}{2}. \qquad (2)$$

С учетом (2) электрическую схему можно перечертить в виде, представленном на рис. 3.

Для дальнейшего преобразования схемы представим сопротивление $R_F/2$ как два параллельно соединенные сопротивления R_F, и вновь, в силу симметрии цепи, разорвем полученную схему в эквипотенциальных точках G и H. В результате получим еще более упрощенный вариант цепи фрактала, представленный на рис. 4.

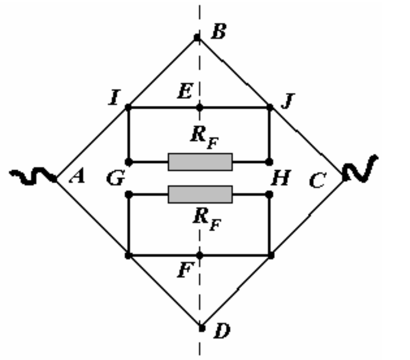


Рис. 4

Дальнейший расчет сопротивления цепи достаточно стандартен: нужно только помнить, что соединительные «проволочки» на данной схеме имеют разные сопротивления, каждое из которых пропорционально соответствующей длине.

Так для расчета сопротивления R_{IJ} цепи между точками I и J используем правила расчета для параллельного сопротивления

$$\frac{1}{R_{IJ}} = \frac{1}{R} + \frac{\sqrt{2}}{R} + \frac{1}{R_F + \frac{R}{\sqrt{2}}}, \qquad (3)$$

где R_{AB} (сопротивление большой стороны фрактала) для удобства обозначено через R.

Из (3) находим

$$R_{IJ} = \frac{R\left(\sqrt{2}R_F + R\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}R_F + R\right) + \sqrt{2}R}. \qquad (4)$$

Соответственно, сопротивление R_{ABC} участка цепи найдем по правилам последовательного соединения

$$R_{ABC} = \frac{R\left(\sqrt{2}R_F + R\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}R_F + R\right) + \sqrt{2}R} + R. \qquad (5)$$

Поскольку верхняя и нижняя части полученной цепи симметричны, то окончательное выражение для нахождения сопротивления фрактала принимает вид

$$R_F = \frac{R_{ABC}}{2} = \frac{\dfrac{R\left(\sqrt{2}R_F + R\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}R_F + R\right) + \sqrt{2}R} + R}{2}. \qquad (6)$$

Относительно R_F (6) представляет собой квадратное уравнение

$$2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)R_F^2 + 2\sqrt{2}RR_F - \left(1+2\sqrt{2}\right)R^2 = 0,$$

решения которого находим сравнительно легко (у нас получилось всего лишь с третьей попытки!).

Отрицательный корень ($R_F = -0{,}984\,R$) отбрасываем сразу, как не имеющий физического смысла. Окончательно

$$R_F = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}R = 0{,}569\,R. \qquad (7)$$

Расчет по (7) дает численное значение сопротивления цепи бесконечного квадратного фрактала

$$R_{AC} = R_F = 0{,}85\,\text{Ом}.$$