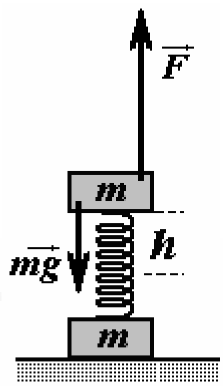
Задание 10.2



2.1 На верхний груз во время подскока действуют постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила мышц $\vec{F}$. Поэтому этот груз движется равноускоренно с ускорением равным

$$a = \frac{F - mg}{m} = (\eta - 1)g\,. \tag{1}$$

Его скорость в верхней точке v_1 легко находится из известной кинематической формулы $h = \frac{v_1^2}{2a}$, она равна

$$v_1 = \sqrt{2(\eta - 1)gh}\,. \tag{2}$$

После того как верхний груз достиг верхней точки, оба груза начинают двигаться вместе, причем скорость центра масс системы равна половине максимальной скорости верхнего груза

$$v_C = \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} \approx 3{,}0\,\frac{м}{с}\,. \tag{3}$$

Отметим, что в момент полного выпрямление часть механической энергии человека теряется – ситуация аналогична абсолютно неупругому удару.

Высота подъема определяется по формуле

$$H_1 = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{(\eta - 1)}{4}h \approx 0{,}45\,м\,. \tag{4}$$

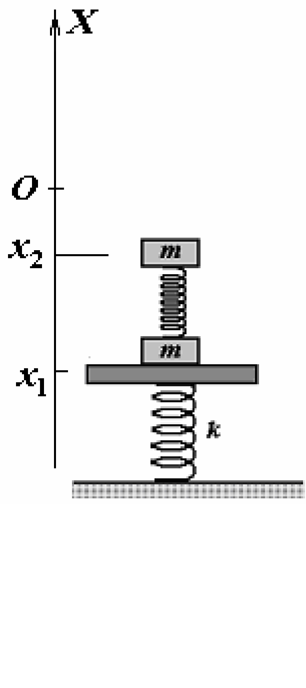
Время отталкивания можно рассчитать по формуле

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \sqrt{\frac{2h}{(\eta - 1)g}} \approx 0{,}10\,с\,. \tag{5}$$

Определение КПД прыжка следует дать самостоятельно. Наиболее разумного его определить как отношение потенциальной энергии человека в верхней точки траектории к работе, совершенной во время подпрыгивания

$$K = \frac{2mgH_1}{Fh} = \frac{\eta - 1}{2\eta} \approx 0{,}43\,. \tag{6}$$

2.2 Учитывая, что время прыжка в десять раз превышает период колебаний, можно пренебречь изменением ускорения платформы за время отталкивания. Кроме того, в условии не задан момент начала прыжка, поэтому его надо выбрать из условия максимальности достигаемой высоты. Совместим начало отсчета вертикальной оси OX со средним положением платформы, координату платформы (и нижнего груза) обозначим x_1, а верхнего груза x_2. Отсчет времени начнем в тот момент, когда платформа находится в крайнем нижнем положении.



Пусть человек начал прыжок в момент времени τ, когда координата, скорость и ускорения платформы (а также обоих грузов) соответственно равны

$$\begin{aligned} x_{20} &= -A\cos\omega\tau \\ v_0 &= A\omega\sin\omega\tau \\ a_0 &= A\omega^2\cos\omega\tau \end{aligned} \tag{7}$$

Эти величины являются начальными для процесса отскока.
Процесс отталкивания проще всего описывать в системе отсчета, связанной с платформой (не смотря на то, что эта система отсчета не инерциальная[5]). Описание движения верхнего груза полностью аналогично п.2.1 . Относительное ускорение верхнего тела равно

$$a' = \frac{F - m(g + a_0)}{m} = \left(\eta - 1 - \frac{a_0}{g}\right)g = (\eta - 1)g\left(1 - \frac{a_0}{g(\eta - 1)}\right). \tag{8}$$

Поэтому относительная скорость верхнего груза в момент максимального распрямления равна

$$v_1' = \sqrt{2a'h} = \sqrt{2(\eta - 1)gh\left(1 - \frac{a_0}{g(\eta - 1)}\right)} = \sqrt{2(\eta - 1)gh\left(1 - \frac{A\omega^2 \cos\omega\tau}{g(\eta - 1)}\right)}. \tag{9}$$

Численная оценка[6] безразмерной величины $\frac{A_0\omega^2}{g(\eta - 1)} \approx 0{,}13$, позволяет использовать приближенное значение этой скорости

$$v_1' = \sqrt{2(\eta - 1)gh\left(1 - \frac{A\omega^2 \cos\omega\tau}{g(\eta - 1)}\right)} \approx \sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos\omega\tau}{2g(\eta - 1)}\right). \tag{10}$$

.Возвращаясь в систему отсчета, связанную с поверхности земли, запишем выражения для скоростей обоих грузов в момент максимального подъема верхнего:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + v_1' = A\omega \sin\omega\tau + \sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos\omega\tau}{2g(\eta - 1)}\right). \\ v_2 &= v_0 = A\omega \sin\omega\tau \end{aligned} \tag{11}$$

Скорость центра масс человека в момент отрыва равна

$$v_C = \frac{v_1 + v_2}{2} = A\omega \sin\omega\tau + \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos\omega\tau}{2g(\eta - 1)}\right). \tag{12}$$

Для достижения максимальной высоты прыжка она должна быть максимальна. Максимум этой функции легко определяется (по аналогии с определением амплитуды колебаний) с помощью известных преобразований

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} + A\omega \sin\omega\tau - \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \frac{A\omega^2 \cos\omega\tau}{2g(\eta - 1)} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} + \sqrt{(A\omega)^2 + (A\omega)^2 \frac{\omega^2 h}{8g(\eta - 1)}}\sin(\omega\tau - \varphi) \end{aligned}, \tag{13}$$

Максимальное значение этого выражения достигается, когда аргумент синуса равен $\frac{\pi}{2}$, и оно равно

$$v_C = \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} + \sqrt{(A\omega)^2 + (A\omega)^2 \frac{\omega^2 h}{8g(\eta - 1)}} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} + A\omega\sqrt{1 + \frac{\omega^2 h}{8g(\eta - 1)}}. \tag{14}$$

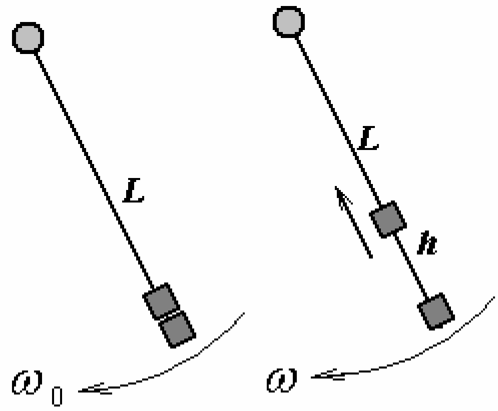
Первое слагаемое в данном выражении есть скорость, развиваемая человеком при прыжке с твердой поверхности, второе слагаемое – добавка обусловленная движением платформы.

---

[5] Не намного сложнее и решение в обычной инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью земли.

Теперь можно найти высоту прыжка по формуле $H_2 = \frac{v_C^2}{2g}$. Численные расчеты приводят к следующим результатам $v_C \approx 4{,}91\frac{м}{с}$, $H_2 \approx 1{,}2м$, что почти в три раза превышает высоту прыжка с твердой поверхности.

Достаточно интересно проанализировать формулу (13). В ней $tg\varphi = \sqrt{\frac{\omega^2 h}{8g(\eta - 1)}} \approx 0{,}06$. *Из условия* $\sin(\omega\tau - \varphi) = 1$ *находим, что фаза колебаний в момент прыжка должна быть равна* $\omega\tau = \frac{\pi}{2} + \varphi$. *То есть – оптимальный момент прыжка после прохождения платформой своего среднего положения, что качественно объяснимо. Платформа «помогает» прыгуну по двум причинам: во-первых, она сама имеет некоторую скорость, во- вторых, при отрицательном ускорении прыгуну легче разогнать верхнюю часть своего тела, так как его вес уменьшается.*



2.3 При решении задачи этого пункта следует воспользоваться законом сохранения момента импульса, если, по прежнему, считать время вставания малым. За малый промежуток времени действием момента силы тяжести можно пренебречь. Пусть за малый промежуток времени, когда качели находятся под углом α к вертикали, человек (в рамках рассматриваемой модели) поднял часть своего тела на расстояние h. Используя закон сохранения момента импульса, найдем изменение его угловой скорости. Если до начала вставания угловая скорость вращения качелей равнялась ω_0 и оба груза находились в нижнем положении, то момент импульса был равен $2mL^2\omega_0$. После вставания угловая скорость стала равной ω, тогда момент импульса выражается формулой $m\omega\left(L^2 + (L-h)^2\right)$. Приравнивая эти два выражения, получим уравнение

$$m\omega\left(L^2 + (L-h)^2\right) = 2mL^2\omega_0, \qquad (15)$$

из которого не трудно найти новое значение угловой скорости:

$$\omega = \frac{2L^2}{L^2 + \left((L-h)^2\right)}\omega_0 = \frac{2}{1 + \left(1 - \left(h/L\right)\right)^2}\omega_0. \qquad (16)$$

Анализ формулы (15) показывает, что, во-первых, при вставании угловая скорость возрастает, а когда человек садится (в этом случае h можно считать отрицательной), то угловая скорость падает, во-вторых, возрастание скорости пропорционально ее начальному значению. Отсюда следует вывод – для наиболее эффективного раскачивания необходимо вставать в нижней точке (когда угловая скорость максимальна), а садится в верхних (когда угловая скорость вообще равна нулю), причем за один период колебаний это можно сделать дважды.

К этому же выводу о методике раскачивания можно прийти и на основании рассмотрения преобразования энергии. Действительно, в нижней точке вес человека максимален, поэтому при вставании он должен совершить большую работу, тем самым, увеличивая энергию системы. Так как процесс раскачивания должен быть периодическим, человек где-то должен приседать, при этом энергия системы уменьшается, ее *уменьшение будет тем меньше, чем меньше угловая скорость в момент приседания, поэтому эффективнее всего приседать в верхних точках траектории. Отметим также, что для корректного расчета изменения скорости движения необходимо учитывать, что в процессе вставания (и приседания) сила мышц не остается постоянной.*

Итак, будем считать, что в верхней (начальной) точке угол отклонения равен α_0, тогда на основании закона сохранения энергии можно записать уравнение

$$2mgL(1-\cos\alpha_0)=\frac{2mL^2\omega_0^2}{2}, \tag{17}$$

где ω_0 - угловая скорость в нижней точке, которая выражается из этого уравнения:

$$\omega_0^2=2\frac{g}{L}(1-\cos\alpha_0). \tag{18}$$

Применим теперь аналогичные энергетические рассуждения для определения максимального угла отклонения после того, как человек встал в нижней точке:

$$\frac{m\left(L^2+(L-h)^2\right)\omega_1^2}{2}=m(L+L-h)g(1-\cos\alpha_1).$$

Из уравнений (19), (18) и (16), следует, что максимальный и начальный углы отклонения связаны соотношением

$$(1-\cos\alpha_1)=\beta(1-\cos\alpha_0), \tag{19}$$

где обозначено $\beta=\frac{4}{1+\left(1-\ {h}/{L}\right)^2}\cdot\frac{1}{2-{h}/{L}}\approx 1{,}16$ - постоянный для рассматриваемой системы коэффициент. Такое же соотношение связывает углы после первого и второго вставаний

$$(1-\cos\alpha_2)=\beta(1-\cos\alpha_1)=\beta^2(1-\cos\alpha_0). \tag{20}$$

Расчеты приводят к следующим численным результатам: при $\alpha_0=10^0$ $\alpha_1\approx 10{,}8°$, $\alpha_2\approx 11{,}6°$.

Интересно также подсчитать, сколько вставаний должен совершить человек, чтобы «крутануть солнышко». Для этого рекуррентную формулу (19) можно представить в явном виде

$$(1-\cos\alpha_k)=\beta^k(1-\cos\alpha_0)$$

из которого можно выразить число циклов N *до полного оборота (пока косинус не станет равным -1). Результат расчетов* $N=\dfrac{\ln\dfrac{2}{1-\cos\alpha_0}}{\ln\beta}\approx 30$ *(15 полных колебаний) - многовато, может и не хватить сил! Причем, основная часть этих усилий затрачивается на начальную раскачку, так для того, чтобы раскрутиться от* $90°$ *до* $180°$ *достаточно пяти вставаний!*

2.4 При решении этого пункта следует воспользоваться основными результатами, полученными в предыдущем. Так, за время вставания в нижней точке угловая скорость вращения увеличится от ω_0 до ω_1, определяемой формулой (16)

$$\omega_1=\frac{2}{1+\left(1-\left({h}/{L}\right)\right)^2}\omega_0. \tag{21}$$

Как мы выяснили, приседать надо в том месте, где угловая скорость минимальна, в данном случае – в верхней точке окружности (будем считать, что качели с человеком ее достигают). На основании закона сохранения энергия для движения от нижней до верхней точек запишем

$$\frac{mL^2 + m(L-h)^2}{2}\omega_1^2 = \frac{mL^2 + m(L-h)^2}{2}\omega_2^2 + 2mg(L + L - h). \qquad (22)$$

Из этого уравнения выразим угловую скорость ω_2 в верхней точке окружности

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - 4\frac{g}{L}\frac{2 - h/L}{1 + \left(1 - h/L\right)^2}. \qquad (23)$$

Еще раз применим формулу (16) для расчета угловой скорости ω_3 после «приседания вверх» в верхней точке, заменив в ней h на $(-h)$

$$\omega_3 = \frac{2}{1 + \left(1 - \left(h/L\right)\right)^2}\omega_2. \qquad (24)$$

Наконец еще раз применим уравнения закона сохранения энергия для движения от верхней точки до нижней

$$\frac{2mL^2}{2}\omega_4^2 = \frac{2mL^2}{2}\omega_3^2 + 2mg \cdot 2L. \qquad (25)$$

из которого получим формулу, аналогичную (23):

$$\omega_4^2 = \omega_3^2 + 4\frac{g}{L}. \qquad (26)$$

Последовательные подстановки и численные расчеты приводят к следующим результатам:

$$\omega_1 \approx 1{,}05\omega_0; \quad \omega_2^2 = 1{,}10\omega_0^2 - 4{,}20\frac{g}{L}; \quad \omega_3^2 = 1{,}22\omega_2^2 = 1{,}34\omega_0^2 - 5{,}12\frac{g}{L};$$

$$\omega_4^2 = 1{,}34\omega_0^2 - 1{,}12\frac{g}{L}. \qquad (27)$$

Учитывая, что второе слагаемое меньше первого (так минимальная скорость, необходимая для того, чтобы сделать один полный оборот должна удовлетворять условию $\omega_0^2 > 4\frac{g}{L}$), можно приближенно записать *(а можно и не записывать)* $\omega_4 \approx 1{,}16\omega_0$. Иными словами, за один оборот угловая скорость может быть увеличена на 15% - пока хватит сил, чтобы вставать и приседать.

Строго говоря, не лишним было бы привести и оценку силы, которую должны развивать мышцы ног в этом гимнастическом упражнении. Но, наш гимнаст силен! – он может развивать силу в три с половиной раза превышающую его вес, поэтому будьте уверены, что этой силы хватит!