11 класс.

<u>Задание 1. «Дырявая разминка»</u>

<u>Задача 1.1</u>

Напряженность электрического поля внутри однородно заряженного с плотностью ρ цилиндра можно найти по теореме Гаусса.

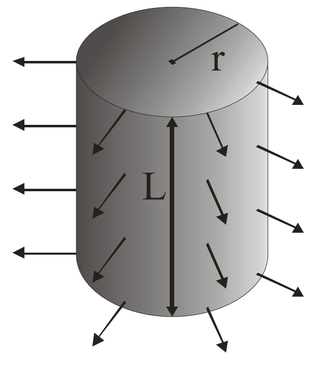

Рис. 1

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \tag{1}$$

или в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\varepsilon_0} \tag{2}$$

Распределение потенциала внутри цилиндра рассчитаем как

$$\varphi = -\int E(r)dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C \tag{3}$$

Поле внутри малого цилиндра нетрудно найти при помощи метода наложений, представив его как сумму полей сплошного цилиндра радиуса R_1 с плотностью заряда ρ_1 и цилиндра радиуса R_2 с плотностью заряда $\rho_2 - \rho_1$ (рис.2).

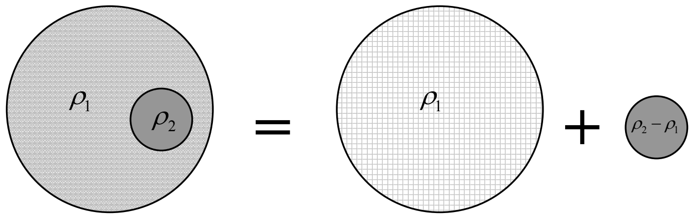

Рис.2

В произвольной точке А с радиус-вектором $\vec{r_1}$ относительно оси большего цилиндра и $\vec{r_2}$ относительно оси малого (рис. 3) поле равно:

$$\vec{E}_0 = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\rho_1 \vec{r}_1}{2\varepsilon_0} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)\vec{r}_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_2 \vec{r_2}}{2\varepsilon_0} = \left\{\vec{r}_1 - \vec{r_2} = \vec{a}\right\} = \frac{\rho_1 \vec{a}}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_2 \vec{r_2}}{2\varepsilon_0} \tag{4}$$

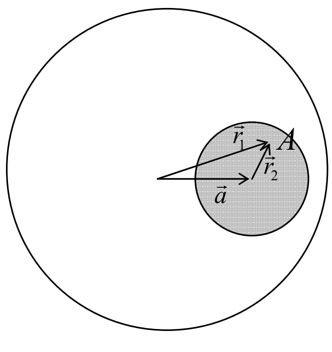

Рис. 3

т.е. поле внутри меньшего цилиндра представляет собой суперпозицию постоянного поля и поля, линейно зависящего от $\vec{r}_2$.

Для дальнейших рассуждений выберем систему координат xOy с началом отсчета на оси малого цилиндра (рис. 4) и выразим в явном виде распределение потенциала внутри малого цилиндра

Распределение потенциала, соответствующее постоянному полю описывается формулой

$$\varphi_1 = -\frac{\rho_1}{2\varepsilon_0} ax + C_1 \tag{4}$$

а распределение потенциала, соответствующее полю, линейно зависящему от радиус-вектора

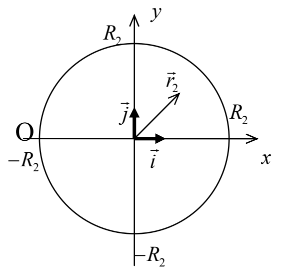

Рис. 4

$$\varphi_2 = -\frac{\rho_2 r_2^2}{4\varepsilon_0} + C_2 = -\frac{\rho_2 (x^2 + y^2)}{4\varepsilon_0} + C_2 \quad (5)$$

Таким образом, потенциал внутри малого цилиндра описывается формулой

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -[\frac{\rho_1 a x}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_2 (x^2 + y^2)}{4\varepsilon_0}] + C \quad (6)$$

Очевидно, линии равного потенциала в данном случае – окружности. Действительно, после очевидных математических преобразований функцию (6) можно переписать в следующем виде

$$\varphi = -\frac{\rho_2}{4\varepsilon_0}[(x + \frac{\rho_1}{\rho_2}a)^2 + y^2] + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_0}(\frac{\rho_1}{\rho_2}a)^2 + C \quad (7)$$

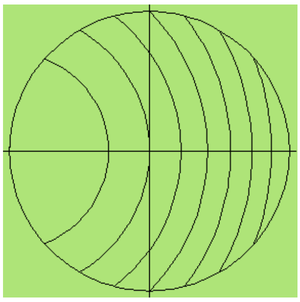

Рис. 5

откуда видно, что центр эквипотенциальных окружностей находится в точке $(-\frac{\rho_1}{\rho_2}a, 0)$, которая в нашем случае (поскольку $\frac{\rho_1}{\rho_2}a = \frac{7,08}{1,77}5,0см = 2,0см = R_2$) будет находиться в точке O (рис. 4) – на границе малого цилиндра.

Вид эквипотенциальных линий приведен на рис. 5.

Задача 1.2

Прежде всего, необходимо найти плотность тока в большом и малом цилиндрах, что сводится к решению задачи о параллельном соединении резисторов.

Токи, текущие в большом и малом цилиндрах соответственно равны

$$I_1 = I\frac{r_2}{r_1+r_2} = I\frac{\rho_2\dfrac{L}{\pi R_2^2}}{\rho_1\dfrac{L}{\pi(R_1^2-R_2^2)}+\rho_2\dfrac{L}{\pi R_2^2}} = I\frac{1}{1+\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\dfrac{R_2^2}{R_1^2-R_2^2}} \quad (1)$$

$$I_2 = I\frac{r_1}{r_1+r_2} = I\frac{\rho_1\dfrac{L}{\pi(R_1^2-R_2^2)}}{\rho_1\dfrac{L}{\pi(R_1^2-R_2^2)}+\rho_2\dfrac{L}{\pi R_2^2}} = I\frac{1}{1+\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\dfrac{R_1^2-R_2^2}{R_2^2}} \quad (2)$$

Плотность тока в большом и малом цилиндрах соответственно:

$$j_1 = \frac{I_1}{\pi(R_1^2-R_2^2)} = \frac{I}{\pi(R_1^2-R_2^2)}\frac{1}{1+\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\dfrac{R_2^2}{R_1^2-R_2^2}} \quad (3)$$

$$j_2 = \frac{I_2}{\pi R_2^2} = \frac{I}{\pi R_2^2}\frac{1}{1+\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\dfrac{R_1^2-R_2^2}{R_2^2}} \quad (4)$$

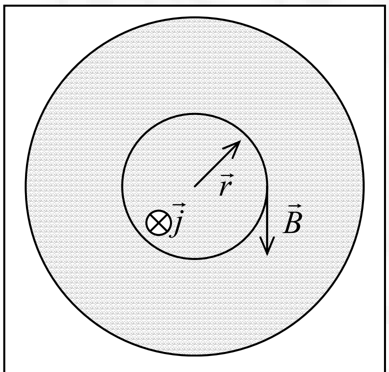

Рис. 1

Численные расчеты приводят к результатам

$$j_1 = 3{,}37\cdot 10^4\ А/м^2$$
$$j_2 = 2{,}70\cdot 10^5\ А/м^2$$

Магнитное поле внутри цилиндра, по которому течет ток с плотностью $\vec{j}$ можно найти по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}r \quad (5)$$

Что удобно представить в векторном виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}[\vec{j}\times\vec{r}] = \frac{\mu_0 j}{2}[\vec{n}\times\vec{r}] \quad (6)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{j}$.

Магнитное поле внутри малого цилиндра нетрудно найти при помощи метода наложений, представив его как сумму полей сплошного цилиндра радиуса R_1 с плотностью протекающего тока j_1 и цилиндра радиуса R_2 с плотностью протекающего тока $j_2 - j_1$ (рис.2).

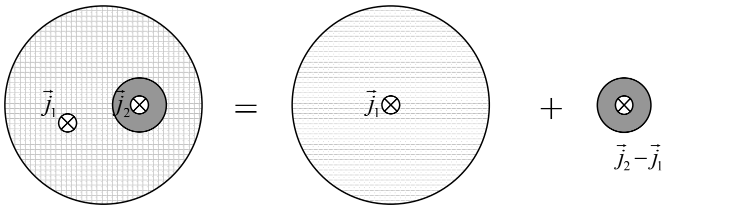

Рис. 2

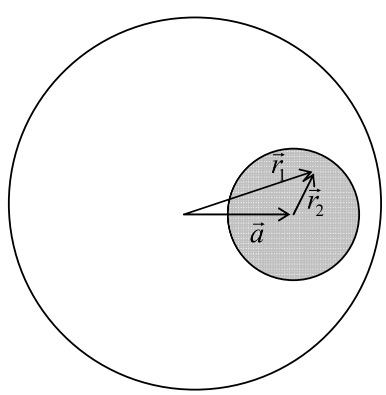

Рис. 3

В точке А с радиус-вектором $\vec{r}_1$ относительно оси большего цилиндра и $\vec{r}_2$ относительно оси малого (рис.3) поле равно:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j_1}{2}[\vec{n}\times\vec{r}_1] + \frac{\mu_0 (j_2 - j_1)}{2}[\vec{n}\times\vec{r}_2] = \tag{7}$$

$$= \frac{\mu_0 j_1}{2}[\vec{n}\times(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] + \frac{\mu_0 j_2}{2}[\vec{n}\times\vec{r}_2] = \frac{\mu_0 j_1}{2}[\vec{n}\times\vec{a}] + \frac{\mu_0 j_2}{2}[\vec{n}\times\vec{r}_2]$$

т.е. поле внутри меньшего цилиндра представляет собой суперпозицию постоянного поля и кругового поля, модуль которого линейно зависит от $\vec{r}_2$.

Выберем систему координат xOy с началом отсчета на оси малого цилиндра (рис.6). Векторы $\vec{i}, \vec{j}$ — орты системы координат.

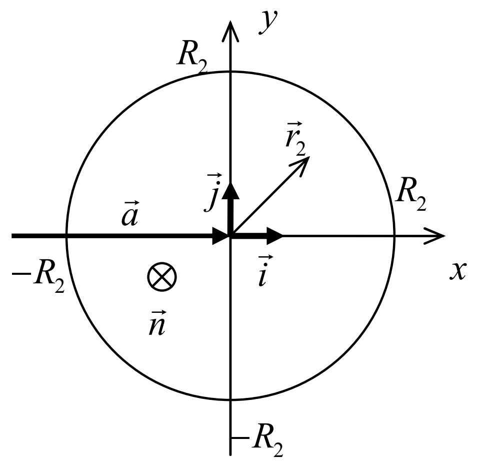

Рис. 4

Векторные произведения, фигурирующие в этих выражениях представим в явном виде

$$\vec{n}\times\vec{a} = a[\vec{n}\times\vec{i}\,] = -a\vec{j} \tag{8}$$

$$\vec{n}\times\vec{r}_2 = [\vec{n}\times(x\vec{i} + y\vec{j})] = y\vec{i} - x\vec{j} \tag{9}$$

Вектор индукции магнитного поля запишется в виде

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 j_1 a}{2}\vec{j} + \frac{\mu_0 j_2}{2}(y\vec{i} - x\vec{j}) =$$

$$= \frac{\mu_0 j_2}{2} y\vec{i} - \frac{\mu_0}{2}(j_1 a + j_2 x)\vec{j} \tag{10}$$

При плотностях токов (3), (4) магнитное поле равно нулю в точке с координатами

$$x_0 = -\frac{j_1}{j_2}a = -\frac{3,37\cdot 10^4}{2,70\cdot 10^5}2,0\,мм = -0,25\,мм = -R_2$$

$$y_0 = 0$$

Итого, магнитная индукция в малом цилиндре равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_2}{2} y\vec{i} - \frac{\mu_0 j_2}{2}(x + R_2)\vec{j} = \frac{\mu_0 j_2}{2}(y\vec{i} - (x + R_2)\vec{j}) \tag{11}$$

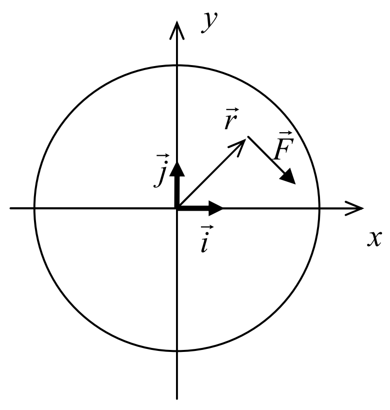

Рис. 5

Силовые линии такого поля представляют собой окружности с центром в точке $(-R_2;0)$.

<u>*Дополнения.*</u>

1. Силовой линией называется такая кривая, касательная к которой в любой точке сонаправлена с полем. Очевидно, что если магнитная индукция перпендикулярна радиус-вектору в любой точке, то силовые линии такого поля – окружности (для любой точки окружности касательная перпендикулярна радиусу, проведенную в данную точку).

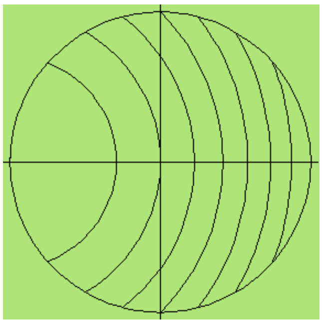

Рис. 6

Как раз такая ситуация будет в нашем случае, если начало координат перенести в точку $(-R_2;0)$. *Вид силовых линий изображен на рисунке 6.*

Для более строгого доказательства рассмотрим векторное поле $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ *(рис. 5). Получим уравнение силовых линий для данного поля.*

В каждой точке силовой линии поле направлено по касательной к ней. Т.е. тангенс угла наклона силовой линии к оси абсцисс равен отношению y-компоненты поля к x-компоненте поля.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \tag{12}$$

Для удобства запоминания данное соотношение лучше записать в таком виде

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} \tag{13}$$

тем более, что уравнения силовой линии в трехмерном случае выглядят аналогично:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{14}$$

(Обратите внимание, здесь два уравнения, а не одно!)

В данном случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{15}$$

$$ydy = -xdx; \tag{16}$$

$$xdx + ydy = 0; \tag{17}$$

$$d(\frac{x^2 + y^2}{2}) = 0; \tag{18}$$

$$x^2 + y^2 = C^2 \tag{19}$$

Это и есть семейство окружностей радиуса C.

2. Обратите внимание, насколько эти две задачи похожи!

<u>Задача1.3</u>

Среднее электрическое поле $\vec{E}_A$ внутри сферы найдем, как поле равномерно поляризованного диэлектрика $\vec{E}$ за вычетом поля, создаваемого равномерно поляризованным шаром $\vec{E}_S$ (рис.2).

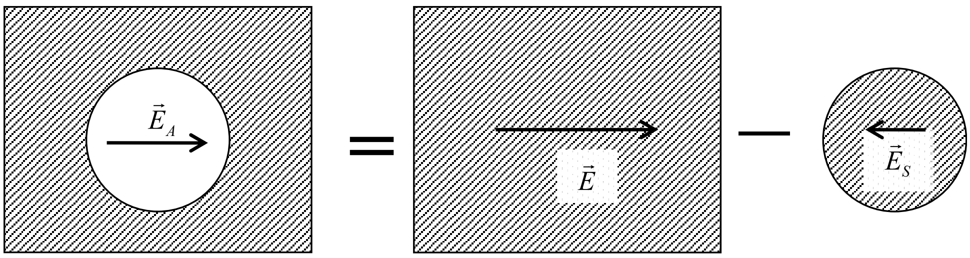

Рис. 1

Поле $\vec{E}_S$ направлено противоположно $\vec{E}$ — это видно из того, что

$$\vec{E}_S = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \text{ (17) и } \vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E} \tag{18}$$

то есть ($\varepsilon > 1$)

$$\vec{E}_S = -\frac{(\varepsilon - 1)\vec{E}}{3} \tag{19}$$

Интересующее нас поле

$$\vec{E}_A = \vec{E} - \vec{E}_S = \vec{E} - (-\frac{(\varepsilon - 1)\vec{E}}{3}) = (1 + \frac{\varepsilon - 1}{3})\vec{E} = \frac{\varepsilon + 2}{3}\vec{E} \tag{20}$$

Именно это поле воздействует на молекулы внутри сферы в нашей модели и индуцирует в них дипольный момент

$$\vec{p} = \beta\varepsilon_0 \vec{E}_A = \beta\varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3}\vec{E} \qquad (21).$$

Очевидно, что поляризация (дипольный момент единицы объема вещества) равна дипольному моменту одной молекулы, умноженному на число молекул в единице объема, т.е. концентрацию молекул:

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\beta\varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3}\vec{E} \tag{22}$$

Выражения (2) и (6) дают нам следующее равенство:

$$(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = n\beta\varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3}\vec{E} \tag{23}$$

из которого определяем диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = \frac{1 + n\beta\dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{n\beta}{3}} = \frac{3 + 2n\beta}{3 - n\beta} = \frac{3 - n\beta + 3n\beta}{3 - n\beta} = 1 + \frac{3n\beta}{3 - n\beta} \tag{24}$$

Дополнение.

Полученная формула, конечно, носит приближённый характер, что вытекает из принятых в задаче приближениях. Первое из них – это рассмотрение точечных диполей, что не совсем верно для веществ, состоящих из сложных молекул. Но, в любом случае, такое приближение выглядит вполне приемлемо по сравнению с выбором именно сферической полости. Заметим, что для кристаллов с кубической решёткой данное приближение выполняется точно. Т.е., действительно, поле создаваемое диполями, находящимися внутри сферы, равно нулю в центре этой сферы (без учёта поля диполя, расположенного в центре). Но точно такая же ситуация будет реализовываться если выбрать полость кубической формы. Выбор именно сферы обоснован экспериментальным подтверждением полученной формулы для большинства газообразных и жидких диэлектриков. Например, для сероуглерода формула верна как для газообразного состояния, так и для жидкого, когда концентрация молекул возрастает в 380 раз.

Подчеркнём также, что полученная формула верна только для веществ состоящих из неполярных молекул. В веществах, состоящих из полярных молекул, влияние соседних молекул существенно и приведённый выше подход оказывается верным только для очень разреженных газов.