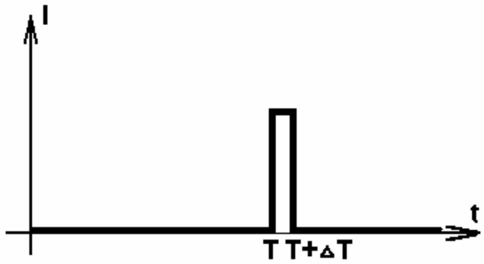
<u>**Задание 11.2 “Масс-спектрометры”**</u>

Часть 1. Постоянное поле.

1.1 Время движения иона от источника до коллектора равно

$$T = \sqrt{\frac{2S}{a}} + \frac{L}{v} \qquad (1),$$

где $a = \frac{Ue}{Sm}$ - ускорение иона в промежутке S, а $v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}$ - скорость, которую приобретает ион, пройдя разность потенциалов U.



Подставляя, эти значения в формулу (1) получим

$$T = S\sqrt{\frac{2m}{Ue}} + L\sqrt{\frac{m}{2Ue}} \qquad (2)$$

Длительность регистрации равна времени работы источника

$$\Delta T = \tau\,. \qquad (3)$$

1.2 Предельный случай перекрывания импульсов реализуется в том случае, когда тяжёлый ион с массой $m + \delta m$ вылетает в момент $t = 0$, а лёгкий, с массой m, в момент $t = \tau$, и эти два иона одновременно достигают коллектора. Для удобства, запишем выражение для времени пролёта, полученное в пункте 1 в виде

$$T = \xi\sqrt{m}\,, \text{ где } \xi = S\sqrt{\frac{2}{Ue}} + L\sqrt{\frac{1}{2Ue}} \qquad (4).$$

Тогда

$$\xi\sqrt{m + \delta m} = \xi\sqrt{m} + \tau \qquad (5).$$

Считая δm малой величиной, запишем

$$\sqrt{m + \delta m} \approx \sqrt{m}\left(1 + \frac{\delta m}{2m}\right) = \sqrt{m} + \frac{\delta m}{2\sqrt{m}} \qquad (5a).$$

Тогда

$$\xi\frac{\delta m}{2\sqrt{m}} = \tau \qquad (6).$$

Откуда получаем

$$\delta m = \frac{2\tau}{\xi}\sqrt{m} = \alpha\sqrt{m} \qquad (7).$$

1.3 Рассчитаем численное значение коэффициента пропорциональности

$$\alpha = \frac{2\tau}{\xi} = \frac{2\tau}{S\sqrt{\frac{2}{Ue}} + L\sqrt{\frac{1}{2Ue}}} \qquad (8)$$

$$\xi = 3.25 \cdot 10^{8}\, с \cdot кг^{-1/2} \qquad (9)$$

$$\alpha = 6.15 \cdot 10^{-15}\, кг^{1/2} \qquad (10)$$

.

Значение α для масс ионов, измеренных в а.е.м. равно

$$\alpha(а.е.м) = \frac{\alpha(кг)}{\sqrt{1а.е.м.}} = 0{,}15 \qquad (11).$$

1.4 Подставляя значение $m = 56а.е.м.$, получим $\delta m = 1.12а.е.м.$, что меньше чем $2а.е.м.$. Т.е. прибор сможет разрешить эти ионы.

Часть 2.Высокочастотное поле.

2.1 Скорость иона после прохождения ускоряющего промежутка равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \qquad (12)$$

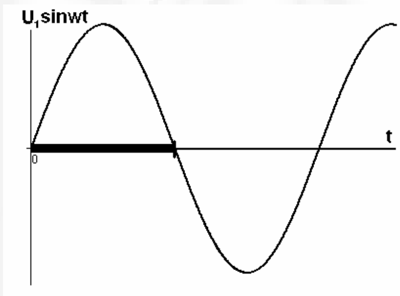
а его максимальное ускорение

$$a_0 = \frac{eU_1}{hm} \qquad (13).$$

Численное значение скорости для иона $^{56}Fe^{+}$ равно

$$v_0 = 5{,}9 \cdot 10^4 \frac{м}{с} \qquad (14).$$

2.2 На первый взгляд, логично предположить, что максимальное приращение энергии ион получит, если реализуется случай изображённый на рисунке. Т.е. ион проходит промежуток ровно за половину периода колебаний поля, когда в промежуток существует ускоряющее поле.



$$\frac{h}{v_0} = \frac{\pi}{\omega} \qquad (15).$$

Используя численное значение скорости, полученное в предыдущем пункте, получим

$$h \approx 2см. \qquad (16)$$

2.3 Пусть ион попадает в область переменного поля в некоторый момент времени τ. Считаем величины a_0 и v_0 известными, тогда зависимость ускорения иона от времени имеет вид

$$a(t) = a_0 \sin(\omega t + \omega\tau), \qquad (17)$$

его скорость изменяется по закону

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 \sin(\omega t + \omega\tau)dt = v_0 + \frac{a_0}{\omega}\cos\omega\tau - \frac{a_0}{\omega}\cos(\omega t + \omega\tau), \qquad (18)$$

наконец, находим зависимость координаты от времени

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega}\cos\omega\tau - \frac{a_0}{\omega}\cos(\omega t + \omega\tau)\right)dt = \\ &= \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega}\cos\omega\tau\right)t - \frac{a_0}{\omega^2}\sin(\omega t + \omega\tau) + \frac{a_0}{\omega^2}\sin\omega\tau \end{aligned} \qquad (19)$$

2.4 Если пренебречь изменением скорости, то время пролета иона через область переменного поля, равна

$$t_1 = \frac{h}{v_0} \qquad (20).$$

Оценим погрешность этого выражения, подставив $t_1 + \delta t_1$ в выражение для координаты $x(t)$. Получим следующее уравнение

$$h = \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega\tau \right) (t_1 + \delta t_1) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega\tau - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t_1 + \omega\tau + \omega\delta t_1). \qquad (21).$$

Переходя к безразмерным параметрам, получим

$$\frac{h\omega}{v_0} = \left(1 + \frac{a_0}{\omega v_0} \cos \omega\tau \right) (\omega t_1 + \omega\delta t_1) + \frac{a_0}{\omega v_0} (\sin \omega\tau - \sin(\omega t_1 + \omega\tau + \omega\delta t_1)) \qquad (22).$$

Величина $\frac{a_0}{\omega v_0}$ того же порядка малости, что и $\frac{\delta t_1}{t_1}$, т.к. $\frac{a_0}{\omega v_0} = \frac{a_0 t_1}{\omega v_0 t_1} \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\delta t_1}{t_1}$.

Поэтому в последнем синусе можно пренебречь величиной $\omega\delta t_1$ и произведение $\frac{a_0}{\omega v_0} \cdot \omega\delta t_1$ можно пренебречь. Преобразовав, получим

$$\omega\delta t_1 = -\frac{a_0}{v_0} \left(t_1 \cos \omega\tau + \frac{1}{\omega} (\sin \omega\tau - \sin(\omega t_1 + \omega\tau)) \right) \qquad (23).$$

Для оценки положим, что $\cos \omega\tau = 1$ и $\sin \omega\tau - \sin(\omega t_1 + \omega\tau) \approx 2$.
Тогда:

$$\left| (\omega\delta t_1)_{\max} \right| = \frac{a_0}{v_0} \left(t_1 + \frac{2}{\omega} \right) \approx \frac{a_0}{v_0} t_1 \qquad (24).$$

Относительная погрешность

$$\frac{\delta t_1}{t_1} \approx \frac{a_0}{v_0 \omega} = \frac{eU_1}{h\omega m v_0} = \left[\frac{m v_0^2}{2} = U_0 e, \quad \omega t_1 \approx \pi \right] \approx \frac{U_1}{6U_0} \approx 1.7 \cdot 10^{-4} << 1 \qquad (25).$$

Т.о. время пролёта определяется только шириной промежутка и начальной скоростью иона.

2.5 Вычислим приращение энергии иона в переменном поле

$$\Delta E = m v_0 \Delta v \qquad (26).$$

Величину Δv возьмём из решения пункта 2.3, подставив вместо t, значение $t_1 = \frac{h}{v_0}$.

$$\Delta E = m v_0 \frac{a_0}{\omega} (\cos \omega\tau - \cos(\omega t_1 + \omega\tau)) \qquad (27).$$

Используя формулу для разности косинусов и подставляя значение t_1, получим:

$$\Delta E(\omega, \tau) = 2 \frac{m v_0 a_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega h}{2 v_0} \right) \sin\left(\frac{\omega h}{2 v_0} + \omega\tau \right) \qquad (28).$$

2.6 Запишем выражение для ΔE, используя безразмерную величину $\varphi = \omega \frac{h}{v_0}$

$$\Delta E = m a_0 h \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\tau \right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} \right)}{\frac{\varphi}{2}} = U_1 e \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\tau \right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} \right)}{\frac{\varphi}{2}} \qquad (29).$$

Максимумы, в зависимости от φ будут наибольшими только для ионов попадающих в промежуток 2 в определённые моменты τ, когда

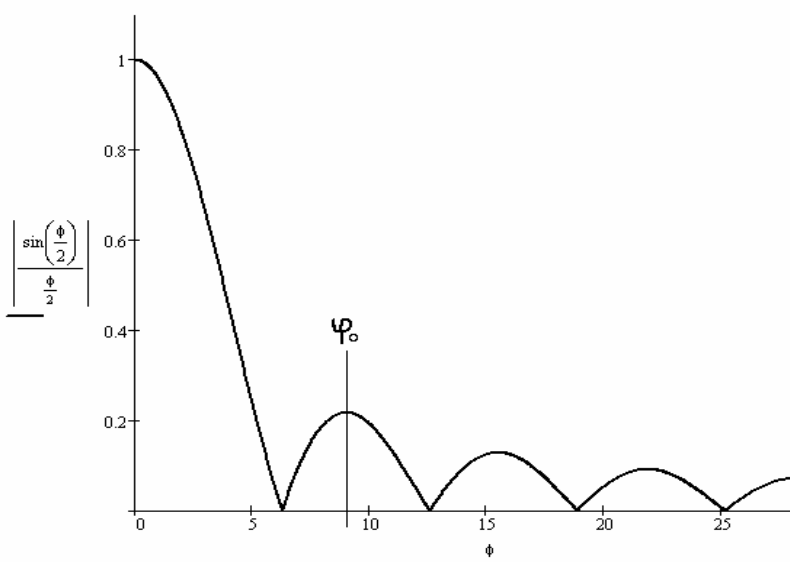
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\tau \right) = \pm 1 \qquad (30),$$

в зависимости от того, какой знак имеет выражение $\dfrac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$.

Поэтому более корректным является рассмотрение модуля ΔE.

$$\Delta E_{\max}(\varphi) = U_1 e \left|\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}\right| \quad (31).$$

График этой функции изображён на рисунке.

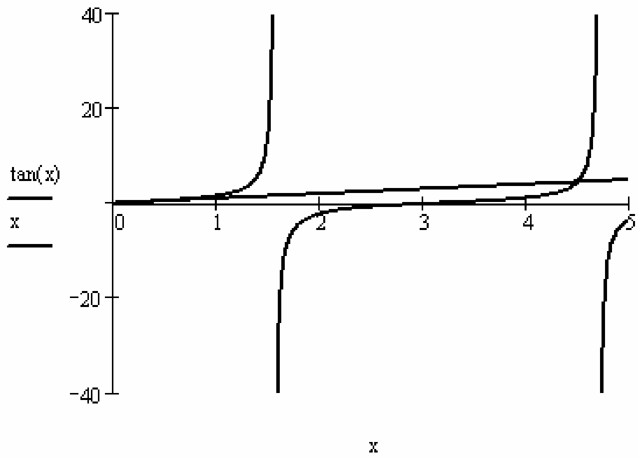


2.7 Очевидно, что самый большой максимум, $\varphi = 0$, одинаков для всех ионов. Анализировать ионный состав потока можно вблизи остальных максимумов, положение которых зависит от массы ионов ($v_0 = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m}}$). Наиболее эффективной будет работа в области первого максимума.

2.8 Для определения частоты ω_0, необходимо исследовать функцию вида $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

$y'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$. Т.е. нужно решить уравнение $x = tg(x)$.

На рисунке видно, что решение этого уравнения $x \approx \dfrac{3}{2}\pi$. Большая точность пока не нужна.



Таким образом

$$\varphi_0 \approx 3\pi \quad (32),$$

$$\omega_0 \approx 3\pi \frac{h}{v_0} \quad (33).$$

Таким образом, предположение, выдвинутое в пункте 2.2, верно лишь по порядку величины. На самом деле за время пролёта иона должно пройти три половины периода изменения высокочастотного поля.

Чтобы ΔE было максимальным $\sin\left(\dfrac{\varphi}{2} + \omega\tau\right)$ должен быть равным -1. Это значение реализуется при

$$\tau_0 \approx 0 \quad (34),$$

или, в более общем виде, $\tau_0 \approx 2\pi n \quad n \in Z$, причём, чем больше n, тем точнее.

При таких ω_0 и τ_0 максимальное приращение энергии

$$\Delta E_{\max} = eU_1 \frac{2}{3}\pi \quad (35).$$

2.9 Точный выбор запирающего напряжения существенен для нормальной работы спектрометра. Чтобы найти α, необходимо более точно решить уравнение $x = tg(x)$. Решение можно подобрать на калькуляторе за пару минут или решить методом последовательных итераций $x_{n+1} = arctg(x_n) + \pi$. Получим

$$x' \approx 4.493 \qquad (36).$$

Тогда $\frac{\sin(x')}{x'} \approx -0.217$. Следовательно

$$\alpha = 0.217 \qquad (37).$$

2.10 При уменьшении запирающего напряжения, на коллектор смогут попасть ионы для которых τ находится в некотором интервале $(\tau_0 - \Delta\tau, \tau_0 + \Delta\tau)$. Для этих ионов

$$\Delta E > eU_{30}(1-\eta) \qquad (38),$$

или

$$\left| U_1 \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\Delta\tau\right) \right| > \alpha U_1 (1-\eta), \text{ где } \omega\Delta\tau << 1 \qquad (39).$$

Вблизи максимума, как было установлено ранее

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2}} = -\alpha \qquad (40).$$

$$\text{А } \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\Delta\tau\right) = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos(\omega\Delta\tau) - \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\sin(\omega\Delta\tau) = -\cos(\omega\Delta\tau) \qquad (41).$$

В выше указанном преобразовании принято, что $\varphi_0 = 3\pi$, $\tau_0 = 0$.

Заметим, что аналогичное преобразование верно и для точных значений φ_0 и τ_0.

$$\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0 + \omega\Delta\tau\right) = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right)\cos(\omega\Delta\tau_0) + \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right)\sin(\omega\Delta\tau) = -\cos(\omega\Delta\tau)$$

Разложив косинус в ряд, получим следующее неравенство:

$$1 - \frac{(\omega\Delta\tau)^2}{2} > 1 - \eta \qquad (42).$$

$$\Delta\tau < \frac{\sqrt{2\eta}}{\omega} \qquad (43).$$

Значение тока

$$I = I_0 \frac{2\Delta\tau}{2\pi/\omega} = I_0 \frac{\sqrt{2\eta}}{\pi} \qquad (44).$$

2.11 В этом пункте, наоборот, $\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right) = -1$ и, предположив, что $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, необходимо решить неравенство:

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| > \alpha(1-\eta) \qquad (45).$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \approx -\alpha\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \qquad (46).$$

Разложив косинус в ряд, получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 < \eta \qquad (47).$$

Максимальное значение $\Delta\varphi = 2\sqrt{2\eta}$ (48)

Максимальное значение $\Delta\omega$ $\Delta\omega = 2\sqrt{2\eta}\,\frac{v_0}{h}$ (49).

Опять таки, выше принято, что $\varphi_0 = 3\pi$.

Но преобразования верны и для точного значения φ_0. *Предлагаем рассмотреть преобразования подробнее. Обозначим* $x = \frac{\varphi_0}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}$. *Разложим* $\frac{\sin(x)}{x}$ *в ряд вблизи точки экстремума.*

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = 0. \qquad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'' = -\frac{\sin(x)}{x} - \frac{2\cos(x)}{x^2} + \frac{2\sin(x)}{x^3}$$

$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{tg(x)} = \frac{\sin(x)}{x}$, *т.к. в точке экстремума* $x = tg(x)$. *Тогда* $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'' = -\frac{\sin(x)}{x} = \alpha$.

В итоге получим:

$\frac{\sin(x)}{x} = -\alpha + \frac{\alpha}{2}(\Delta x)^2$, $\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} = -\alpha\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2\right)$, *что приводит к тому же ответу.*

2.12 Значение частоты, полученное в пункте 2.8: $\omega_0 \approx 3\pi\frac{h}{v_0}$, т.е. частота пропорциональна корню от массы ионов,

$$\omega_0 \sim \sqrt{m} \qquad (50).$$

$$\sqrt{m+\delta m} \approx \sqrt{m}\left(1+\frac{\delta m}{2m}\right) \qquad (51).$$

$$\frac{\omega_0+\Delta\omega}{\omega_0} = 1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{m+\delta m}}{\sqrt{m}} = 1+\frac{\delta m}{2m} \qquad (52).$$

Откуда получаем:

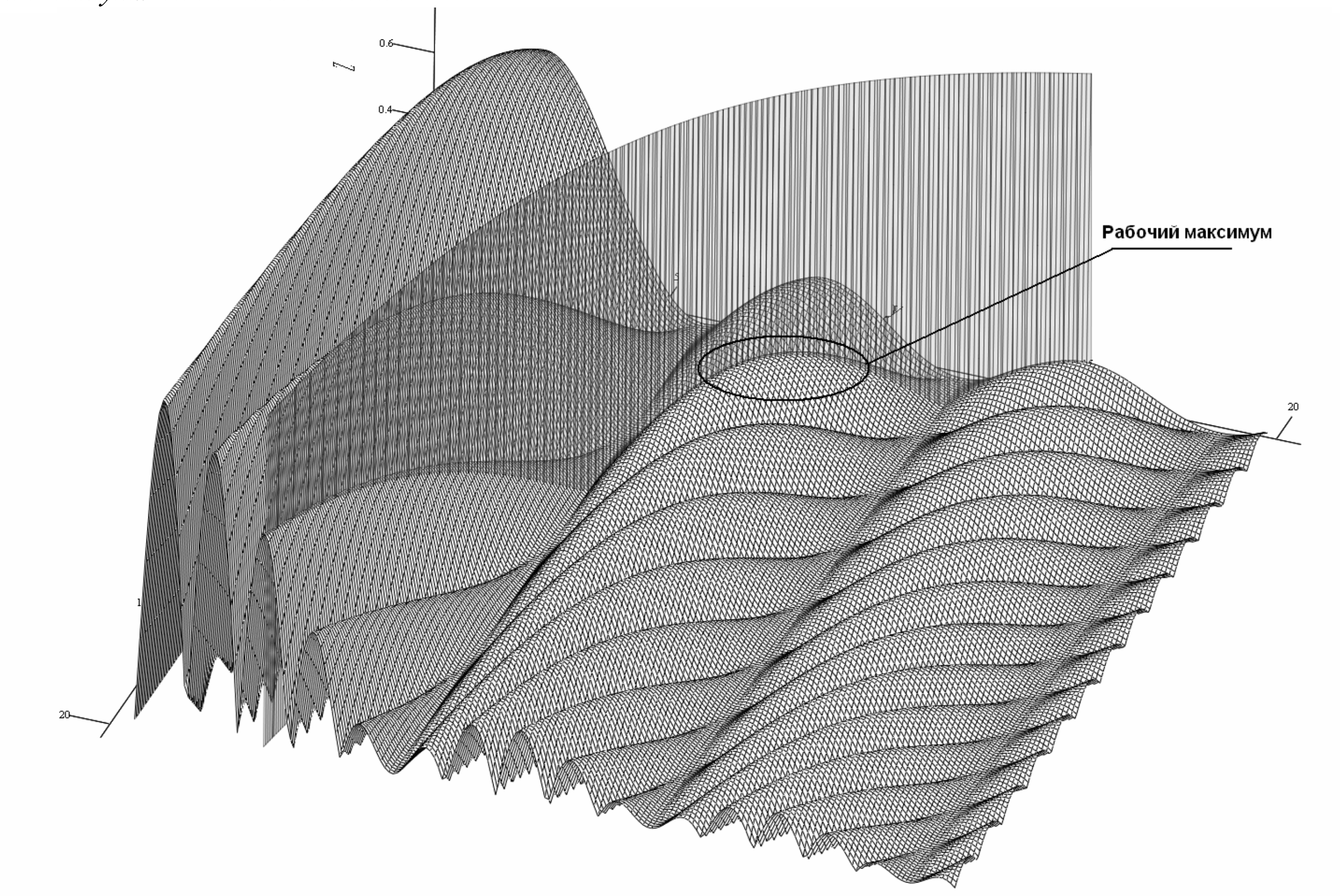
$$\frac{\delta m}{m} = 2\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2\frac{2\sqrt{2\eta}}{3\pi} = \frac{4\sqrt{2\eta}}{3\pi} \qquad (53).$$

К примеру, для $\eta = 0.01$ $\frac{\delta m}{m} = 0.06$.

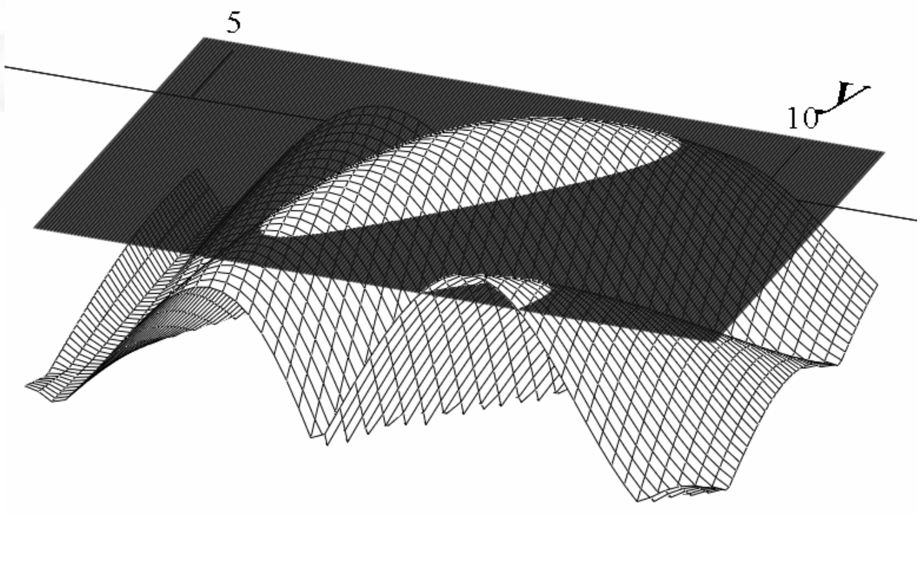
Дополнение.

В качестве дополнения к решению задачи, попытаемся изобразить трёхмерный график функции $Z(\varphi,\tau)=\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\omega\tau\right)\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$. *Для наглядности положим* $\omega=0.1\varphi$.

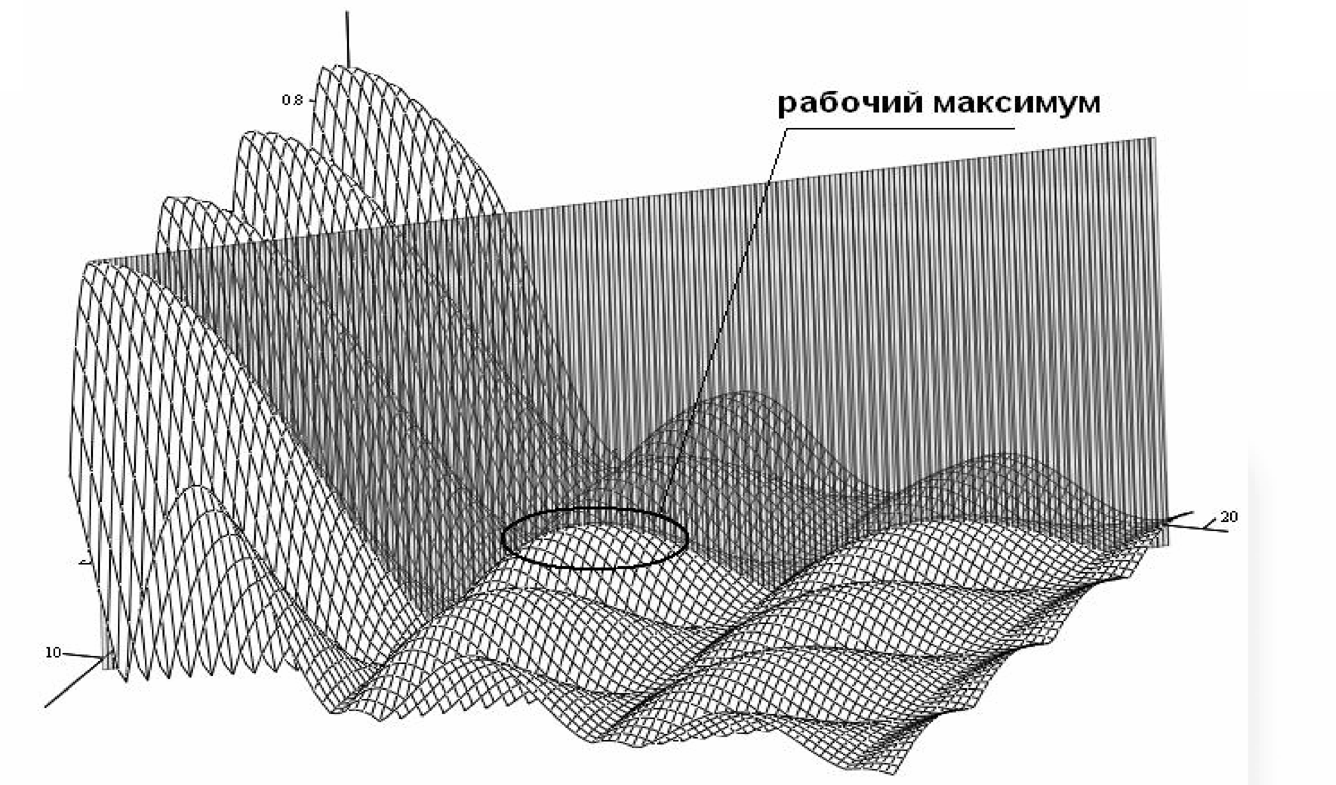
На рисунке приведён график этой зависимости, по оси OX отложены значения τ *, по оси OY - значения* φ. *Также на графике показано сечение* $\frac{\varphi}{2}+0.1\varphi\tau=\frac{5}{2}\pi$ *и выделен «рабочий максимум» для этого сечения.*



Рассмотрим более подробно область с «рабочим максимумом». Хорошо видно, что, уменьшая запирающее напряжение, мы увеличиваем ток при заданной частоте (ширина «холма» в направлении OX), и одновременно уменьшаем разрешающую способность прибора (ширина «холма» в направлении OY).



Можно немного упростить графическое изображение данной зависимости, проведя следующие рассуждения. «Время прихода» τ является независимой величиной, но мы также можем сделать независимой величиной $\omega\tau$, придав этому выражению смысл «фазы прихода» ($\varphi_0 = \omega\tau$). Изобразим график зависимости $Z(\varphi,\varphi_0) = \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\varphi_0\right)\dfrac{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\dfrac{\varphi}{2}}$.



В этом случае сечением будет являться плоскость (на графике: $\dfrac{\varphi}{2}+\varphi_0 = \dfrac{7}{2}\pi$*). Приведём также увеличенный «рабочий максимум». Заметим, что, как и в первом, так и во втором случае в сечении получается уже исследованная ранее функция* $\dfrac{\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\dfrac{\varphi}{2}}$.