Задание 11-3 «Гиперболоид инженера Гарина»

1.1 Понятно, что отношение числа поглощенных к числу падающих фотонов будет равно отношению суммарной площади сечения всех молекул в слое к площади поперечного сечения падающего потока, поэтому

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{\sigma\gamma\Delta x S}{S} = \sigma\gamma\Delta x . \qquad (1)$$

Отсюда следует, что интенсивность потока на выходе

$$I = I_0\left(1 - \sigma\gamma\,\Delta x\right) \qquad (2)$$

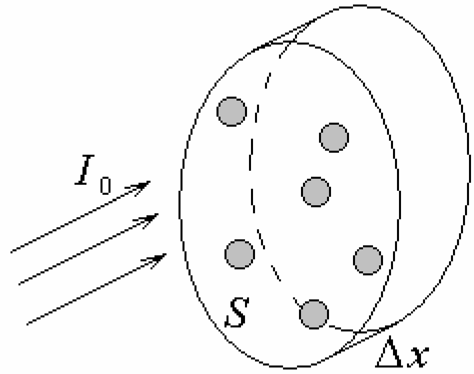
1.2 Среднюю длину пробега фотонов можно оценить, разделив начальную плотность потока на «скорость» его изменения в начале слоя

$$\langle l \rangle = \frac{I_0}{\left(\Delta I / \Delta x\right)_{x=0}} = \frac{1}{\gamma\sigma} . \qquad (3)$$

1.3 Оценка среднего времени жизни молекулы в возбужденном состоянии проводится аналогично

$$\langle \tau \rangle = \frac{N_0}{\left(\Delta N / \Delta t\right)_{t=0}} = \frac{1}{A} \qquad (4)$$

1.4 Если плотность падающего потока велика, то под его действием заметная часть молекул перейдут в возбужденное состояние и не будут участвовать в поглощение света (этот эффект называется насыщением поглощения). Обозначим число молекул (в некотором объеме) в возбужденном состоянии N_1, а в основном N_0. Их сумма остается постоянной и равной общему числу молекул в рассматриваемом объеме $N = N_0 + N_1$. Для определения числа молекул в возбужденном состоянии (в стационарном режиме) следует воспользоваться уравнением баланса: например, для возбужденных молекул – число молекул, переходящих в единицу времени из основного состояния в возбужденное под действием падающего потока равно числу молекул возвращающихся вследствие спонтанного и вынужденного испускания. Для составления подобных уравнений необходимо получить выражение для числа переходов из одного состояние в другое за некоторый малый промежуток времени.



Мысленно выделим тонкий слой, перпендикулярный направлению падающего потока, толщиной Δx и площадью S. Пусть в этом слое содержится N_0 молекул, находящихся в основном состоянии. За малый промежуток времени Δt на слой попадает $n = I_0 S \Delta t$ фотонов. Из них поглотится

$$\Delta n = n\frac{N_0\sigma}{S} = I_0 S\Delta t\frac{N_0\sigma}{S} = I_0 N_0 \sigma\,\Delta t . \qquad (5)$$

Столько же молекул переходят в возбужденное состояние.

Аналогичные рассуждения применимы и для процессов вынужденного испускания. На основании полученного соотношения можно теперь записать необходимое уравнение баланса числа частиц в возбужденном состоянии

$$N_0 I_0 \sigma\Delta t = N_1 I_0 \sigma\Delta t + A N_1 \Delta t . \qquad (6)$$

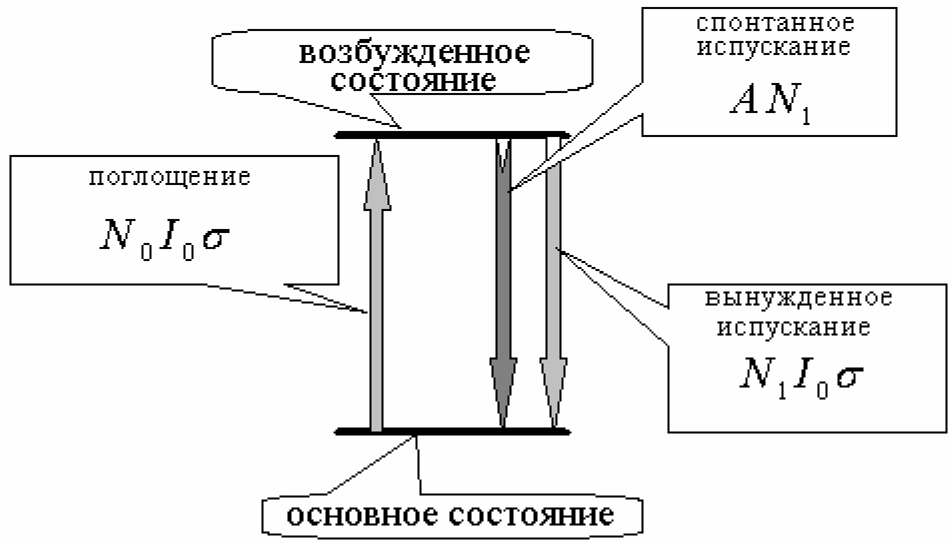
Учитывая, что $N_0 = N - N_1$, из уравнения (6) определим число частиц в возбужденном

$$N_1 = N\frac{I_0\sigma}{2I_0\sigma + A} \qquad (7)$$

и основном состояниях

$$N_0 = N - N_0 = N\frac{I_0\sigma + A}{2I_0\sigma + A}. \qquad (8)$$

Возможные переходы между состояниями и их скорости (число переходов в единицу времени) показаны на диаграмме, иллюстрирующей уравнение баланса (6)).



Отметим, что при неограниченном возрастании плотности падающего потока числа частиц в основном и возбужденном состоянии выравниваются, то есть стремятся к $\frac{N}{2}$.

Соотношения, аналогичные (7) (8) можно записать и для концентрации частиц в основном γ_0 и возбужденном γ_1 состояниях

$$\gamma_0 = \gamma\frac{I_0\sigma + A}{2I_0\sigma + A}, \quad \gamma_1 = \gamma\frac{I_0\sigma}{2I_0\sigma + A}. \qquad (9)$$

Для расчета пропускания необходимо учесть, что фотоны, испущенные вынужденно, неотличимы от фотонов падающего потока. Поэтому число фотонов на выходе из рассматриваемого слоя равно числу падающих фотонов минус число поглощенных фотонов плюс число фотонов, испущенных вынужденно, поэтому

$$I = I_0 - I_0\gamma_0\sigma + I_0\gamma_1\sigma .$$

Окончательно, коэффициент пропускания равен

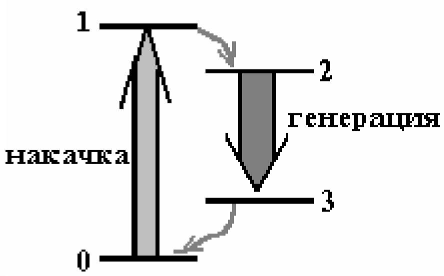
$$p = 1 - \gamma_0\sigma\Delta x + \gamma_1\sigma\Delta x = 1 - \sigma\left(\gamma\frac{I_0\sigma + A}{2I_0\sigma + A} - \frac{I_0\sigma}{2I_0\sigma + A}\right)\Delta x = 1 - \sigma\gamma\frac{A}{2I_0\sigma + A}\Delta x . \qquad (10)$$

Часть 2. Резонатор.

2.1 Пусть от правого зеркала начинает распространяться поток фотонов плотности I_0. Через время, равное времени пролета фотона через резонатор (в двух направлениях) $\tau = \frac{2L}{c}$, где c - скорость света, эти фотоны попадут на частично проницаемое зеркало и часть из них, которая определяется пропусканием зеркала, покинут резонатор. Таким образом, уменьшение плотности потока фотонов в резонаторе за этот промежуток времени составит $\Delta I = I_0(1-\rho)$. Среднее время исчезновения фотонов определяется по уже использованной методике

$$\langle t\rangle = \frac{I_0}{\left(\Delta I/_{\Delta t}\right)_0} = \frac{I_0\tau}{(\Delta I)_0} = \frac{\tau}{1-\rho} = \frac{2L}{c(1-\rho)}. \tag{11}$$

Часть 3. Лазер.



Излучение накачки приводит к тому, что часть молекул оказывается в промежуточном состоянии 2. Так как в состоянии 3 молекул практически нет, то излучение, энергия фотонов которого равна разности энергий уровней 2 и 3, при прохождении через активную среду может усиливаться. Действительно, это излучение будет приводить к вынужденному испусканию фотонов, а их поглощение будет отсутствовать, так как в нижнем состоянии 3 молекул нет. (Говорят, что для перехода 2-3 осуществляется инверсная заселенность). Очевидно, что усиление будет наиболее существенно для фотонов распространяющихся вдоль оси резонатора в обоих направлениях, поэтому именно для этого потока выполняются условия генерации. Допустим, что это излучение присутствует в резонаторе, обозначим плотность его потока в одном направлении $I_Г$. *Строго говоря, плотности потоков различны для различных направлений распространения. Однако, из-за малой концентрации активных частиц при расчете числа возбужденных молекул этим различием можно пренебречь. Это различие существенно при записи условий стационарности генерации, что будет учтено нами позднее.*

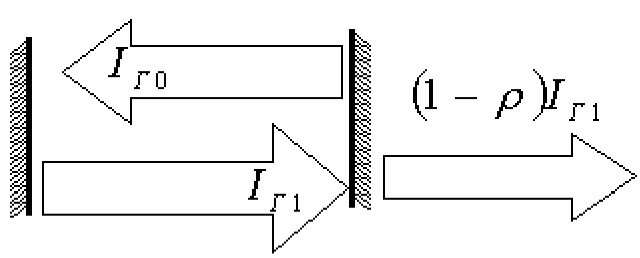
Под действием излучения накачки часть молекул переходит в возбужденное состояние 1, а затем быстро «сваливается» в промежуточное состояние 2. покинуть это состояние молекулы могут двумя способами: посредством спонтанного перехода в низлежащие состояния или посредством вынужденного испускания стимулированного излучением генерации. Если молекула оказывается в состоянии 3, то она также практически мгновенно оказывается в основном состоянии 0. Из-за быстрых переходов $1 \to 2$ *и* $3 \to 0$ *при расчете концентраций молекул мы можем пренебречь числом молекул в промежуточных состояниях 1 и 3. Уравнение баланса числа частиц (или их концентрации) в состоянии 2 будет иметь вид*

$$I_0(\gamma-\gamma_2)\sigma_0\Delta t = A\gamma_2\Delta t + 2I_Г\sigma_1\gamma_2\Delta t \tag{12}$$

где $\gamma-\gamma_2=\gamma_0$ - концентрация частиц в основном состоянии. В последнем слагаемом учтено наличие потов генерации в двух направлениях. Перепишем это уравнение в виде

$$I_0\gamma\sigma_0 = \gamma_2\left(I_0\sigma_0 + A\Delta t + 2I_Г\sigma_1\right). \tag{13}$$

Получим теперь условия стационарности потока генерации. Для этого обозначим плотность потока генерации «стартующего» от правого (частично прозрачного зеркала) $I_{Г0}$. Дважды пройдя через резонатор, это излучение усилится, и его плотность потока станет равной



$$I_{Г1} = I_{Г0}\left(1+2\gamma_2\sigma_1 L\right). \tag{14}$$

Отразившись от зеркала, эта плотность потока уменьшится и в стационарном режиме станет равной исходной плотности $I_{Г0}$. Следовательно, искомое условие стационарности примет вид

$$I_{Г1}\rho = I_{Г0}\left(1+2\gamma_2\sigma_1 L\right)\rho = I_{Г0}. \tag{15}$$

Малое отличие коэффициента отражения от единицы и малость концентрации числа активных молекул оправдывают приближение постоянства плотности потока генерации при его распространении в обоих направления.
Из уравнения (15) следует, что концентрация числа молекул в состоянии 2 равна

$$\gamma_2 = \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{2\sigma_1 L}. \tag{16}$$

Подставляя это значение в уравнение (13) получим выражение

$$I_0 \gamma \sigma_0 = \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{2\sigma_1 L}\left(I_0\sigma_0 + A\Delta t + 2I_Г\sigma_1\right), \tag{17}$$

из которого определим плотность потока генерации внутри резонатора:

$$I_Г = \frac{1}{2\sigma_1}\left(I_0\sigma_0\left(\frac{2\sigma_1 L\rho}{1-\rho}\gamma - 1\right) - A\right). \tag{18}$$

Для того, чтобы процесс генерации реализовывался, это выражение должно быть больше нуля, откуда определяем пороговое значение интенсивности накачки

$$I_Г = \frac{1}{2\sigma_1}\left(I_0\sigma_0\left(\frac{2\sigma_1 L\rho}{1-\rho}\gamma - 1\right) - A\right) \geq 0 \quad \Rightarrow I_{0Пор} = \frac{A}{\sigma_0\left(\frac{2\sigma_1 L\rho}{1-\rho}\gamma - 1\right)} \tag{19}$$

Формула (18) определяет плотность потока генерации внутри резонатора, чтобы получить ее значение на выходе из резонатора ее следует умножить на коэффициент пропускания зеркала $(1-\rho)$. Кроме того, для удобства построения графика ее можно представить в виде

$$I_{Гвых} = (1-\rho)\frac{A}{2\sigma_1}\left(\frac{I_0}{I_{0пор}} - 1\right). \tag{20}$$

Схематический график этой функции показан на рисунке.