9 класс

Задание 1. «Разминка»

Задача 9.1.1

1.1.1 На свечу, погруженную в воду, действуют сила тяжести F_T и сила Архимеда F_A.

Чтобы свеча вообще плавала, должно выполняться условие плавания: архимедова сила должна быть равна силе тяжести

$$F_A = F_T. \quad (1)$$

Для устойчивого плавания свечи необходимо, чтобы при отклонениях от вертикального положения возникал момент сил, возвращающий свечу в первоначальное положение. Это условие будет выполнено, если точка приложения силы тяжести (центр масс свечи) будет лежать ниже точки приложения выталкивающей силы Архимеда совпадающей с центром масс вытесненной жидкости – центром плавания (рис.1а), в противном случае вертикальное положение будет неустойчиво (рис.1б).

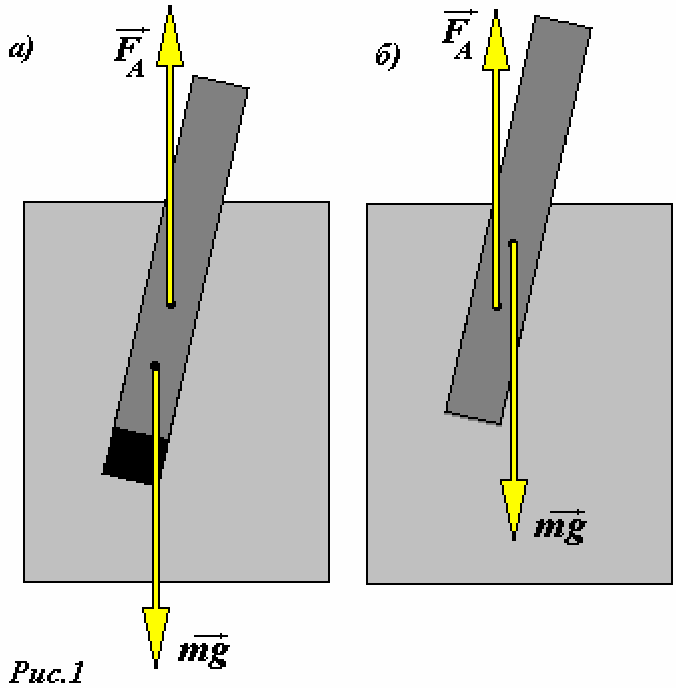


Рис.1

В случае однородной свечи центр тяжести всегда будет находиться выше центра плавания, поэтому свеча не может устойчиво плавать в вертикальном положении. Именно для этого к нижнему основанию свечи прикрепляется алюминиевая шайба.

Если длина свечи больше нескольких диаметров, то можно пренебречь изменением положения точки приложения силы Архимеда при ее наклоне.

Обозначим глубину погружения свечи с алюминиевой шайбой под воду d (рис. 2). Тогда условие (1) записывается, как

$$\rho gsl + \rho_1 gsh = \rho_0 gsd \quad (2)$$

откуда следует

$$d = \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0}. \quad (3)$$

Свеча будет плавать, если глубина её погружения не превышает сумму высот свечи и шайбы, то есть при $d \le l + h$. С учетом соотношения (3) это условие принимает вид

$$\frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0} \le l + h. \quad (4)$$

Теперь определим, при какой высоте свеча сможет плавать устойчиво в вертикальном положении. Выберем ось координат Oy, с началом отсчета по нижнему краю алюминиевой шайбы. Тогда координата центра плавания будет равна

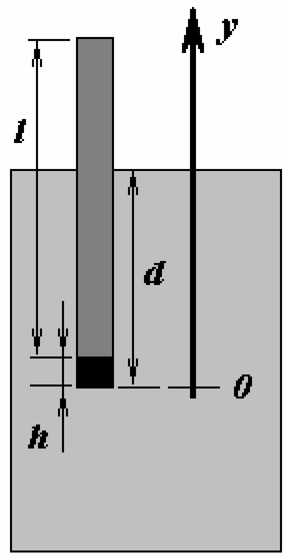


Рис. 2

$$y_A = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0}, \quad (6)$$

а координата центра тяжести

$$y_c = \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l \left(h + \frac{l}{2} \right)}{\rho_1 h + \rho l} \qquad (7)$$

Таким образом, условие устойчивости $y_A \geq y_C$ формулируется в виде неравенства

$$\frac{1}{2} \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0} \geq \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l \left(h + \frac{l}{2} \right)}{\rho_1 h + \rho l}. \qquad (8)$$

Совместное решение неравенств (4) и (8), первое из которых линейное, а второе – квадратное, и дает нам интервал длин, при которых свеча устойчиво будет плавать в воде

$$8,5 см \leq l \leq 18,5 см. \qquad (9)$$

1.1.2 Свеча погаснет, когда её длина станет равной минимально возможной для плавания, т.е. $l_{\min} = 8,5 см$. Значит, гореть она будет в течение времени

$$t = \frac{l - l_{\min}}{u} = 15 мин. \qquad (10)$$

Отметим, что все время горения свеча будет плавать устойчиво.

__**Дополнения.**__

1.Проиллюстрируем графически решение данной задачи. На рис. 3 построены графики зависимостей полной длины свечи вместе с шайбой $(l+h)$; глубины погружения d, рассчитанной по формуле (3); координаты центра плавания (6) и координаты центра масс (7) от длины парафиновой части свечи l (деления шкал даны в сантиметрах). Заливкой выделены области, в которых выполняются условие плавания и условие устойчивости.

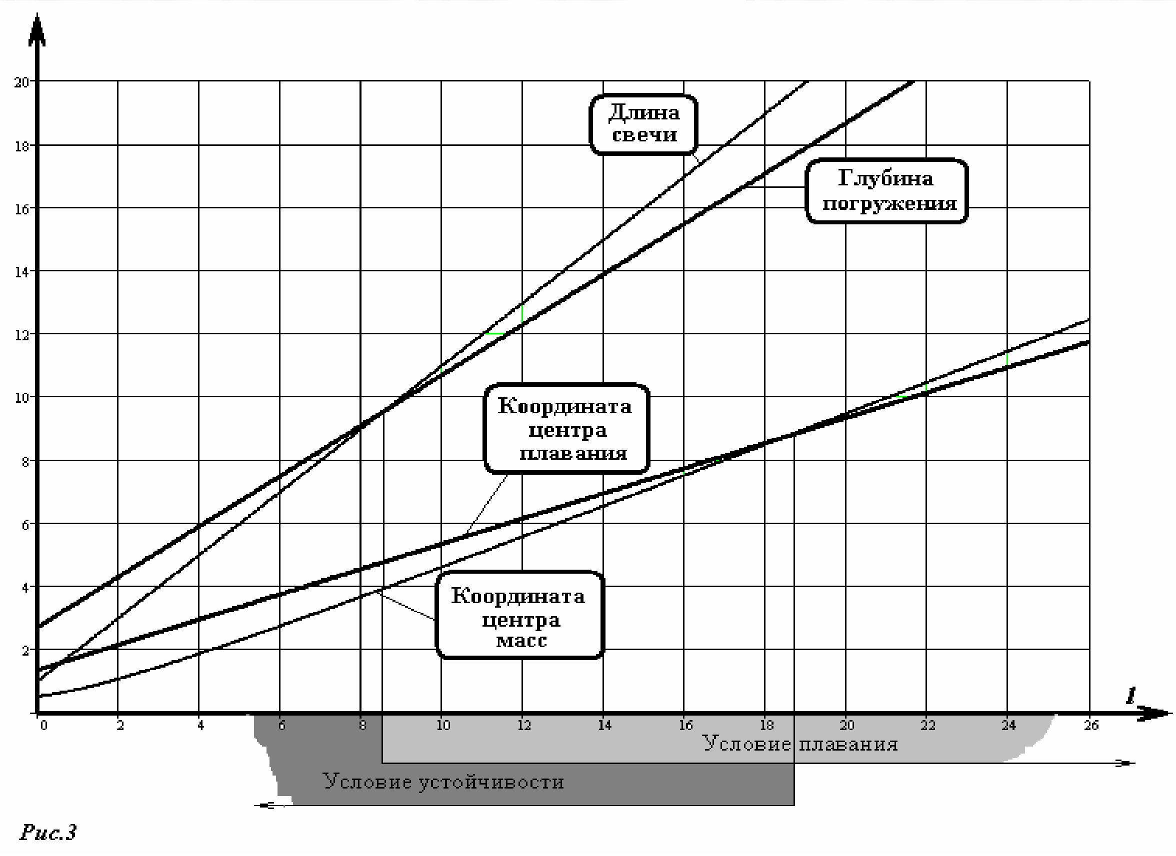


Рис.3

2. *Приведем более подробные выкладки, необходимые для решения системы неравенств. Для упрощения работы с громоздкими выражениями в дальнейшем введем безразмерные переменные* $\eta = \rho/\rho_0, \eta_1 = \rho_1/\rho_0, \xi = l/h$. *Используя данные условия* $\eta = 0,8; \eta_1 = 2,7$.

В новых переменных глубина погружения

$$d = (\eta\xi + \eta_1)h, \qquad (д1)$$

а условие плавания (4) превращается в

$$\eta\xi + \eta_1 \le \xi + 1. \qquad (д2).$$

Решаем это неравенство: $\xi(1-\eta) \ge \eta_1 - 1$ *и поскольку* $1-\eta$ *= 0,2 > 0, то*

$$\xi \ge \frac{\eta_1 - 1}{(1-\eta)}. \qquad (д3)$$

Минимальная высота свечи, при которой она ещё сможет плавать, равна

$$l_{\min} = \xi_{\min} h = \frac{\eta_1 - 1}{(1-\eta)} h, \qquad (д4)$$

или $l_{\min} = \dfrac{2,7-1}{1-0,2} \cdot 1,0см = 8,5см$.

В безразмерных переменных координата центра выталкивания равна

$$y_A = \frac{d}{2} = \frac{(\eta\xi + \eta_1)h}{2}, \qquad (д5)$$

а координата центра тяжести

$$y_C = \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l (h + \frac{l}{2})}{\rho_1 h + \rho l} = \frac{\frac{1}{2}\eta_1 + \eta\xi + \frac{1}{2}\eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi} h. \qquad (д6)$$

Выполним математические преобразования необходимые для решения неравенства (8) с учетом того, что $\eta_1 + \eta\xi > 0$

$$\frac{(\eta\xi + \eta_1)h}{2} \ge \frac{\frac{1}{2}\eta_1 + \eta\xi + \frac{1}{2}\eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi} h$$

$$(\eta\xi + \eta_1) \ge \frac{\eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi}$$

$$(\eta\xi + \eta_1)^2 \ge \eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2$$

$$\eta^2\xi^2 + \eta_1^2 + 2\eta\eta_1\xi \ge \eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2$$

$$\eta(1-\eta)\xi^2 + 2\eta(1-\eta_1)\xi + \eta_1(1-\eta_1) \le 0$$

Мы получили квадратичное неравенство относительно ξ. *Поскольку коэффициент при* ξ^2 *положительный, решением этого неравенства будет* $\xi_1 \le \xi \le \xi_2$, *где* $\xi_{1,2}$ *- корни квадратного уравнения*

$$\eta(1-\eta)\xi^2 + 2\eta(1-\eta_1)\xi + \eta_1(1-\eta_1) = 0.$$

Его дискриминант равен

$$D/4 = (b/2)^2 - ac = \eta^2(1-\eta_1)^2 - \eta(1-\eta)\eta_1(1-\eta_1) = \eta(1-\eta_1)[\eta(1-\eta_1) - \eta_1(1-\eta)] =$$
$$\eta(1-\eta_1)[\eta - \eta\eta_1 - \eta_1 + \eta\eta_1] = \eta(1-\eta_1)(\eta - \eta_1) = \eta(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)$$

При наших данных $D/4 = 0,8(2,7-1)(2,7-0,8) = 2.6 > 0$, *следовательно, существует 2 действительных корня этого уравнения:*

$$\xi_{1,2} = \frac{-\eta(1-\eta_1) \pm \sqrt{\eta(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}}{\eta(1-\eta)} = \frac{\eta_1 - 1}{1-\eta} \pm \frac{1}{1-\eta}\sqrt{\frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}{\eta}}.$$

Подстановка численных значений исходных данных приводит к результату $\xi_1 = -1{,}5; \xi_2 = 18{,}5$.

Таким образом, условие устойчивого плавания имеет вид:

$$\frac{\eta_1 - 1}{1-\eta} - \frac{1}{1-\eta}\sqrt{\frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}{\eta}} \le \xi \le \frac{\eta_1 - 1}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta}\sqrt{\frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}{\eta}},$$

а с учетом условия плавания (д3))

$$\frac{\eta_1 - 1}{1-\eta} \le \xi \le \frac{\eta_1 - 1}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta}\sqrt{\frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}{\eta}}.$$

Итак, для устойчивого плавания должно выполняться $-1{,}5см \le l \le 18{,}5см$*, для плавания вообще* $l \ge 8{,}5см$*. Таким образом, свеча будет устойчиво плавать, если длина свечи лежит в интервале* $8{,}5см \le l \le 18{,}5см$.

Задача 9.1.2

После замыкания электрической цепи вследствие выделения тепла Джоуля-Ленца температура t проводника начнет расти. Однако как следует из условия, по мере роста температуры проводника будет увеличиваться и количество теплоты, отдаваемое им в единицу времени в окружающее пространство. Следовательно, при некотором значении t_i мощность P тепловыделения в проводнике сравняется с мощностью $P_{охл}$ тепловых потерь (охлаждения) через его поверхность, и дальнейший рост температуры в системе прекратится.

Запишем условие динамического равновесия $P_{охл} = P$ с учетом закона Джоуля-Ленца

$$\frac{U^2}{R} = \alpha(t_i - t_0)S, \tag{1}$$

где t_i — максимальная (установившаяся) температура проводника.

Подставляя в (1) выражения для сопротивления проводника $R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{l}{\pi r^2}$ и площади его боковой поверхности $S = 2\pi r l$ (теплоотдачей через торцы цилиндра пренебрегаем, т.к. $r << l$) получим

$$\frac{U^2}{\rho l}\pi r^2 = \alpha(t_i - t_0)2\pi r l \quad \Rightarrow \quad t_i - t_0 = \{t_0 = 0{,}0°C\} = t_i = \frac{U^2 r}{2\rho\alpha l^2}, \tag{2}$$

где U — напряжение на проводнике. Поскольку объем проводника остается неизменным, то изменение длины проводника приводит к изменению его радиуса. Эта связь следует из выражения для объема

$$V = \pi r^2 l \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi l}}. \tag{3}$$

Подставляя, это выражение в формулу (2), для температуры проволоки получим

$$t_i = \frac{U^2}{2\rho\alpha l^2}\sqrt{\frac{V}{\pi l}} = \frac{C}{l^{5/2}}. \tag{4}$$

где C - постоянный для данных условий коэффициент. Записав два подобных соотношения для начальной конечной длины проводника и разделив их друг на друга, получим пропорцию

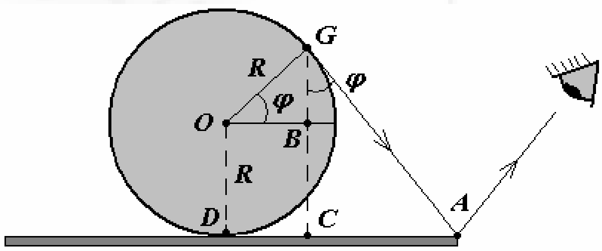
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{l_1^{5/2}}{l_2^{5/2}}. \tag{5}$$

из которой следует ответ задачи $t_2 = t_1\sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5} \approx 10°C$.

Уменьшение температуры проводника после растяжения вполне понятно и на качественном уровне: к этому ведет как падение мощности тепловыделения вследствие увеличения сопротивления, так и увеличение площади теплоотдачи (поверхности) проводника.

Отметим, что радиус проводника, заданный в условии задачи, не вошел в конечный результат. Однако малое численное значение этого параметра позволяет считать, что распределение тока внутри проводника является однородным.

Задача 9.1.3



Как следует из рисунка, увидеть в зеркале минимального размера некоторую точку G на глобусе можно только в том случае, если луч, идущий по касательной к шару в этой точке попадет на край зеркала A .

Следует заметить, что в этом случае она будет всего лишь «на горизонте» глобуса, но предположим, что острота зрения смотрящего достаточна для подобного наблюдения.

Искомый минимальный радиус зеркала найдем как

$$R_{\min} = DC + CA = \{(DC = OB)\} = R\,cos\,\varphi + CG\,tg\,\varphi . \quad (1)$$

Поскольку $CG = R + R\,sin\,\varphi$, то окончательно получаем

$$R_{\min} = R\,cos\,\varphi + R(1 + sin\,\varphi)\,tg\,\varphi = R(cos\,\varphi + (1 + sin\,\varphi)\,tg\,\varphi) . \quad (2)$$

Расчет по (2) для угла $\varphi = 55°$ дает

$$R_{\min} = 0,63\,\text{м} .$$

Интересно, что, чисто теоретически из (2) следует, при неограниченном возрастании радиуса зеркала ($R_{\min} \to \infty$) можно увидеть даже точку северного полюса глобуса ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), что в реальности невозможно из-за ограниченной разрешающей способности глаза человека.