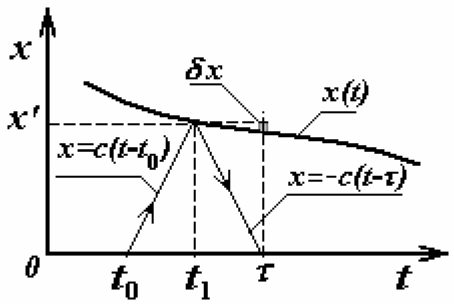
Задание 9.2. «Запаздывание»

Сначала рассмотрим общие подходы к решению данной задачи.

Схематически изобразим (рис. 1) закон движения тела $x(t)$. Сигнал, посланный в момент времени t_0 распространяется по закону $x_c = c(t - t_0)$. Когда сигнал достигнет движущегося тела, их координаты будут равны, поэтому момент времени отражения сигнала t_1, может быть найдено из уравнения



$$x(t_1) = c(t_1 - t_0). \qquad (1)$$

Это уравнение позволяет найти момент времени отражения t_1 как функцию времени испускания сигнала t_0. Отраженный сигнал движется в обратном направлении с той же скоростью, поэтому он вернется в исходную точку в момент времени τ, для которого выполняется соотношение

$$t_1 - t_0 = \tau - t_1. \qquad (2)$$

Согласно описанной в условии методике, за положение объекта в момент прихода сигнала принимается его положение в момент отражения сигнала. На рисунке отмечена ошибка определения закона движения δx, связанная с тем, что координата движущегося тела в момент отражения сигнала, приписывается изображению в момент прихода отраженного сигнала.

Итак, в принципе, первый путь решения задачи проясняется: из уравнения (1) находим t_1 как функцию t_0; вычисляем координату $x(t_1(t_0))$, затем из уравнения (2) $t_1(t_0) - t_0 = \tau - t_1(t_0)$ выражаем t_0 как функцию τ; наконец записываем закон движения[1] *изображения $x'(\tau) = x(t_1(t_0(\tau)))$.*

Однако на этом пути придется решать два уравнения (1) и (2), при этом необходимо находить промежуточную функцию $t_1(t_0)$, которая не нужна в окончательном результате. Поэтому можно элементарно избавиться от этой функции, переписав уравнение (1) с помощью соотношения (2)

$$x(t_1) = c(\tau - t_1). \qquad (3)$$

Из этого уравнения можно найти время отражения как функцию времени приема отраженного сигнала $t_1(\tau)$, а закон движения изображения далее можно определить двумя способами

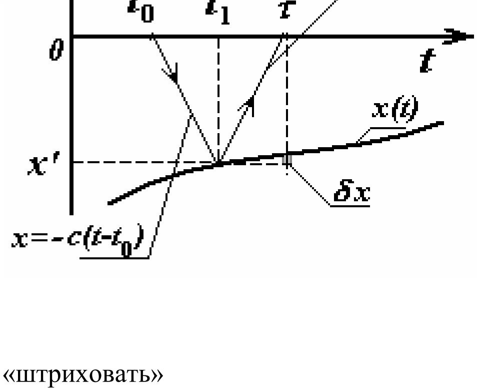
$$x'(\tau) = x(t_1(\tau)), \qquad (4)$$

либо

$$x'(\tau) = c(\tau - t_1(\tau)). \qquad (5)$$

Этот путь явно короче: решение одного уравнения и одна подстановка.

Теперь еще одно дополнительное осложнение – а если координата объекта отрицательна? Сделаем рисунок для этого варианта (рис. 2) Тогда следует рассматривать сигнал, распространяющийся в отрицательном направлении оси Ox, в этом случае уравнение (1) надо заменить на



$$x(t_1) = -c(t_0 - t_1), \qquad (1^*)$$

соответственно изменится и более удобное уравнение

---

[1] Все кинематические характеристики движения изображений будем «штриховать»

(3)

$$x(t_1) = -c(\tau - t_1). \qquad (3^*)$$

Уравнения (3) и (3*) отличаются только знаком правой части, поэтому их можно объединить

$$x(t_1) = \pm c(\tau - t_1) \qquad (6)$$

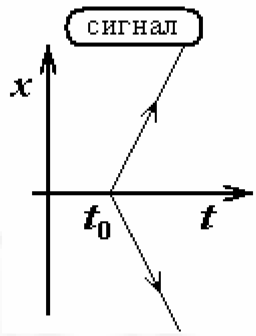
или переписать в виде, который отражает явный физический смысл (расстояние до объекта равно расстоянию, которое проходит сигнал):

$$|x(t_1)| = c(\tau - t_1). \qquad (7)$$

Кстати, при любом движении (не только вдоль оси Ox) – справедливо такое уравнение!

Замечательно, но уравнение (7) или равносильное ему (6) может иметь несколько корней. Конечно, исходя из постановки задачи[2], следует выбирать только те корни, для которых выполняется условие

$$t_0 < t_1 < \tau. \qquad (8)$$



Каждый раз придется анализировать корни – искать их смысл, принимать, или отбрасывать. По-видимому, все же сначала лучше анализировать, а потом искать то, что нужно. Такой анализ можно унифицировать: построить график закон движения и график распространения сигнала (рис.3), а затем рассмотреть точки их пересечения. При этом следует посмотреть, как меняется «картинка» при изменении параметров задачи.

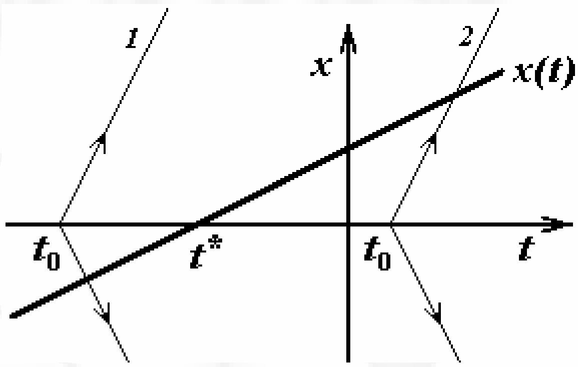
Применим эти общие рассуждения к тем вариантам движения объекта, которые описаны в условии задачи.

1. Равномерное движение.

Построим график закона движения тела

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \qquad (1.1)$$

который является прямой линией (рис. 4)



Также изобразим графики движения сигналов, испущенных в различные моменты времени. Легко заметить, что необходимо решать различные уравнения, в зависимости от знака координаты объекта в момент отражения сигнала. Эти два варианта легко различимы. Объект пересекает начало координат[3] в момент времени

$$t^* = -\frac{x_0}{v_0}; \qquad (1.2)$$

Если сигнал послан в этот момент времени, то отражение и возвращение произойдут мгновенно, то есть при $t_0 = t^*$ $\quad \tau = t_1 = t_0 = t^*$.

Итак, при $\tau = t_1 = t_0 < -\dfrac{x_0}{v_0}$, для определения закона движения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1 = -c(\tau - t_1), \qquad (1.3)$$

---

[2] Сигнал распространяется во все стороны пространства, но только «из прошлого в будущее».

[3] В реальности, такая ситуация не очень приятна, как для объекта, так и для наблюдателя. Но в рамках нашей модели материальных точек, будем считать, что наши «герои» успешно разойдутся. Более правдоподобная ситуация будет рассмотрена чуть позже.

из которого следует, что $t_1 = \dfrac{c\tau + x_0}{c - v_0}$, а закон движения имеет вид

$$x'(\tau) = -c(\tau - t_1) = \frac{c}{c - v_0}(x_0 + v_0\tau). \tag{1.4}$$

При $\tau = t_1 = t_0 > -\dfrac{x_0}{v_0}$ уравнение, для определения времени отражения, имеет вид

$$x_0 + v_0 t_1 = c(\tau - t_1), \tag{1.5}$$

из которого определяем $t_1 = \dfrac{c\tau - x_0}{c + v_0}$ и закон движения изображения

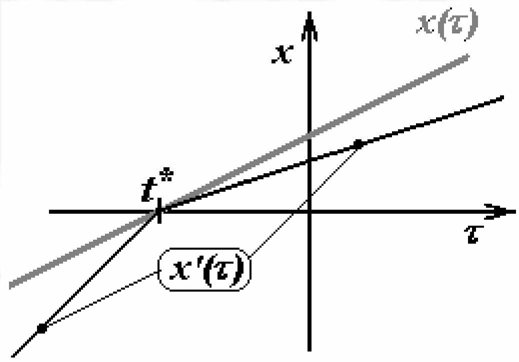
$$x'(\tau) = c(\tau - t_1) = \frac{c}{c + v_0}(x_0 + v_0\tau). \tag{1.6}$$

Итак, закон движения изображения в рассматриваемом случае имеет вид

$$x'(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\gamma}(x_0 + v_0\tau), & при \quad \tau < -\dfrac{x_0}{v_0} \\ \dfrac{1}{1+\gamma}(x_0 + v_0\tau), & при \quad \tau > -\dfrac{x_0}{v_0} \end{cases}, \tag{1.7}$$

здесь обозначено $\gamma = \dfrac{v_0}{c}$ (это обозначение мы будем использовать и в дальнейшем).

График этой функции показан на рисунке 5, там же изображен и график движения самого объекта.



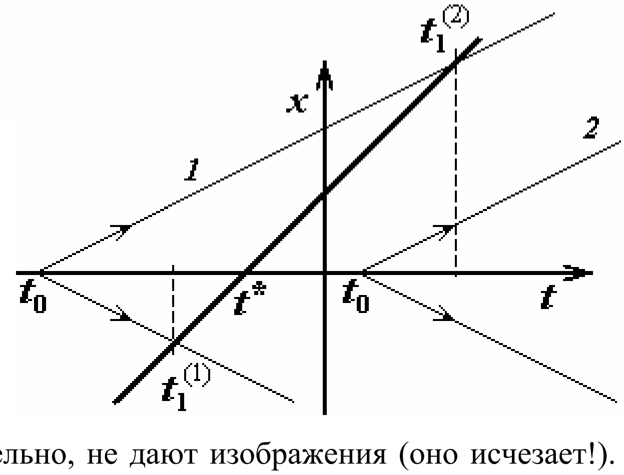
Скорость движения изображения изменяется скачком при переходе объекта через начало координат: при приближении объекта его изображение движется быстрее, при удалении наоборот – изображение движется медленнее:

$$v'(\tau) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{1-\gamma}, & при \quad \tau < -\dfrac{x_0}{v_0} \\ \dfrac{v_0}{1+\gamma}, & при \quad \tau > -\dfrac{x_0}{v_0} \end{cases}. \tag{1.8}$$

Попытайтесь качественно объяснить этот эффект изменения скорости.

На этом решение данной части задачи не заканчивается – необходимо отдельно рассмотреть движение объекта со скоростью, большей скорости сигнала $v_0 > c$.

Опять построим графики законов движения объекта и сигналов, посланных в различные моменты времени (рис. 6 – на котором ради экономии места масштаб оси времени изменен по сравнению с предыдущими рисунками). В этом случае ситуация кардинально изменяется. Во-первых, сигналы, посланные в моменты времени $t_0 > t^*$ не догонят объект, следовательно, не дают изображения (оно исчезает!).



Во-вторых, сигналы, посланные при $t_0 < t^*$, отразятся от объекта дважды: один раз при приближении самолета (в момент времени $t_1^{(1)}$) и при его удалении (в момент времени $t_1^{(2)}$). Второе отражение произойдет, когда объект догонит сигнал. Таким образом, при $\tau > t^*$ сонар[4] будет давать два изображения.

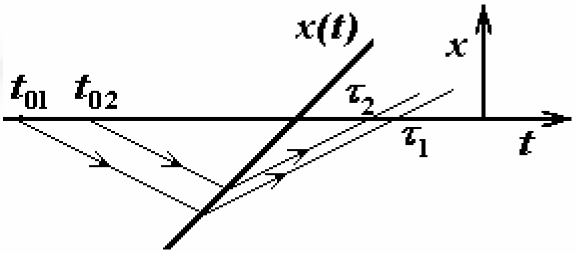
Для расчета закона движения первого изображения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1^{(1)} = -c\left(\tau - t_1^{(1)}\right), \tag{1.9}$$

которое совпадает с уравнением (1.3), и поэтому приводит к тому же закону движения (напомним, справедливому только при $\tau > t^*$)

$$x'_{(1)}(\tau) = \frac{c}{c - v_0}\left(x_0 + v_0\tau\right). \tag{1.10}$$

Поразительно, так как $v_0 > c$, скорость изображения отрицательна – изображение движется в сторону противоположную движению объекта. Объяснение этого парадокса дано на рисунке 7. Сигнал, посланный раньше ($t_{01} < t_{02}$), возвратится позже ($\tau_1 > \tau_2$), поэтому быстрее будет поступать информация о более близком положении объекта.



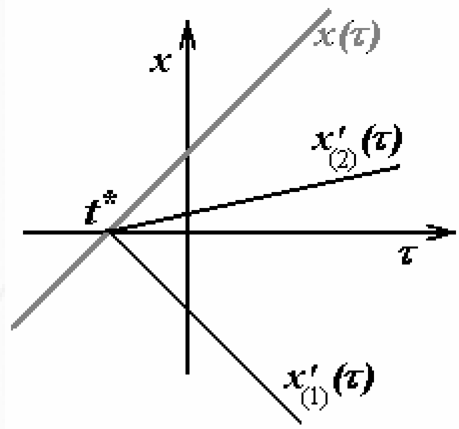
Для описания движения второго изображения необходимо решить уравнение, совпадающее с уравнением (1.5),

$$x_0 + v_0 t_1^{(2)} = c\left(\tau - t_1^{(2)}\right), \tag{1.11}$$

что приводит к аналогичному закону движения изображения

$$x'_{(2)}(\tau) = \frac{c}{c + v_0}\left(x_0 + v_0\tau\right). \tag{1.12}$$

Графики этих законов движения построены на рисунке 8.



Скорости движения изображений легко найти из законов движения

$$\begin{aligned} v'_{(1)} &= \frac{v_0}{1-\gamma}, \quad при \quad \tau > -\frac{x_0}{v_0} \\ v'_{(2)} &= \frac{v_0}{1+\gamma}, \quad при \quad \tau > -\frac{x_0}{v_0} \end{aligned}. \tag{1.13}$$

Таким образом, изображения появляются в момент пересечения объектом начала координат, затем одно медленно удаляется в туже сторону, что и движущийся объект, а второе – движется быстрее в противоположную сторону.

[4] Не будем обсуждать, можно ли реально зарегистрировать оба отраженных сигнала – в нашем рассмотрении затуханием сигнала пренебрегаем.

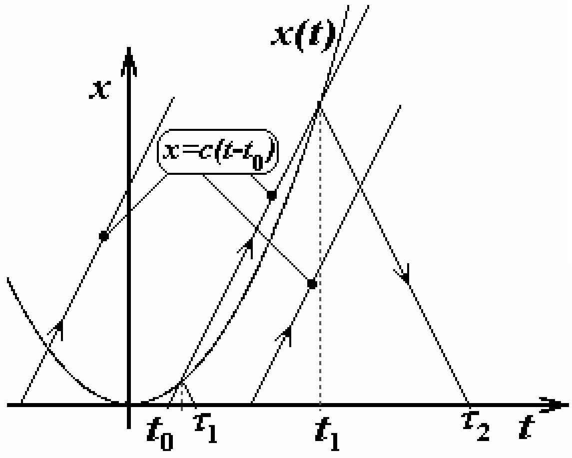
2. Равноускоренное движение.

Если при равномерном движении пришлось рассматривать четыре варианта, то сколько их будет при равноускоренном движении объекта?

При законе движения

$$x(t) = \frac{at^2}{2} \qquad (2.1)$$

объект все время находится с одной стороны от наблюдателя ($x \geq 0$), поэтому достаточно рассмотреть только сигнал, распространяющийся в положительном направлении оси Ox. Также обратим внимание, что скорость объекта изменяется и на одних интервалах больше скорости сигнала, а на других меньше.

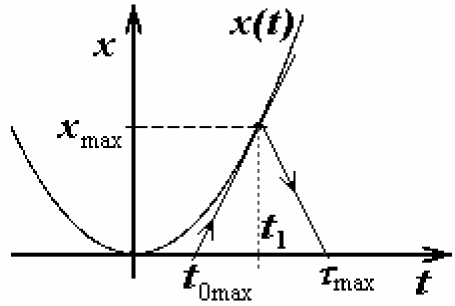


Графический анализ взаимного расположения графика движения объекта (парабола) и сигналов (лучей прямых) показывает (рис. 9), что от одного сигнала, испущенного в момент t_0, может быть зарегистрировано два отражения τ_1, τ_2 - один раз сигнал догоняет объект, второй раз объект догоняет сигнал.

Возможна также ситуация, когда отраженных сигналов не будет – сигнал не может догнать объект, разогнавшийся до скорости большей скорости сигнала.

Граничным между этими случаями, является вариант, при котором график распространения сигнала является касательным к параболе – графику закона движения объекта (рис. 10). Легко понять, что в этом случае в момент отражения скорость объекта $v = at$ сравнивается со скоростью сигнала. Это позволяет найти этот момент (последней возможности догнать объект), используя уравнение $at_{1\max} = c$. Из которого следует

$$t_{1\max} = \frac{c}{a}. \qquad (2.2)$$



В этот момент находится в точке с координатой

$$x_{\max} = \frac{a(t_{1\max})^2}{2} = \frac{c^2}{2a}. \qquad (2.3)$$

Максимальный момент отправления сигнала, который может догнать объект, определяется формулой

$$t_{0\max} = t_{1\max} - \frac{x_{\max}}{c} = \frac{c}{2a}, \qquad (2.4)$$

а соответствующий момент возвращения «последнего» сигнала

$$\tau_{\max} = t_{1\max} + \frac{x_{\max}}{c} = \frac{3c}{2a}, \qquad (2.5)$$

На первый взгляд, кажется, что решение задачи опять надо разбивать на различные этапы, но ведь мы разработали другой метод решения, основанный на «привязке» к моменту регистрации, а не к моменту «запуска». Поэтому рассмотрим графическую иллюстрацию уравнения (3), включающего законы движения объекта и отраженного сигнала. Этот метод позволяет решить задачу единообразно для любого момента времени регистрации. Для графического анализа этого уравнения необходимо «зеркально» отразить рисунок 1.9, в результате получим рисунок 11. Здесь также есть значения моментов регистрации τ, которым соответствуют два момента отражения, следовательно, и два изображения; есть значение $\tau_{\min}$ - минимальное время прихода отраженных сигналов (независимо от времени их отправления). Это время находится аналогично (2.5)

$$\tau_{\min} = -\frac{c^2}{2a} + \frac{c}{a} = -\frac{c}{2a}. \tag{2.6}$$

Таким образом, при $\tau > \tau_{\min}$ общее уравнение (3), имеющее вид

$$\frac{at_1^2}{2} = c(\tau - t_1), \tag{2.7}$$

имеет два корня

$$t_1(\tau) = -\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}\,. \tag{2.8}$$

Соответствующие этим решениям законы движения изображений имеют вид

$$x'_{(1,2)} = c(\tau - t_1) = c\left(\tau + \frac{c}{a} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}\right) = \frac{c}{a}\left(a\tau + c\left(1 \mp \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}\right)\right). \tag{2.9}$$

Проанализируйте эти функции самостоятельно, их графики показаны на рисунке 1.12.

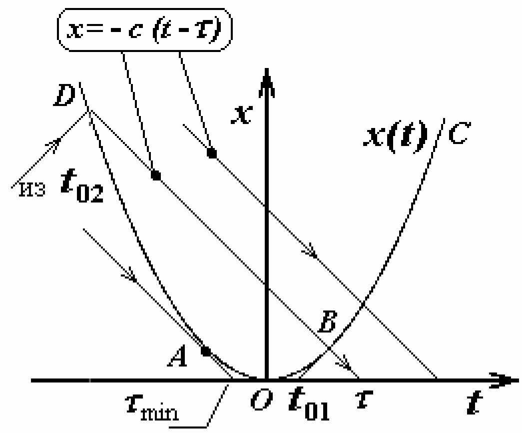


Рис. 1.11

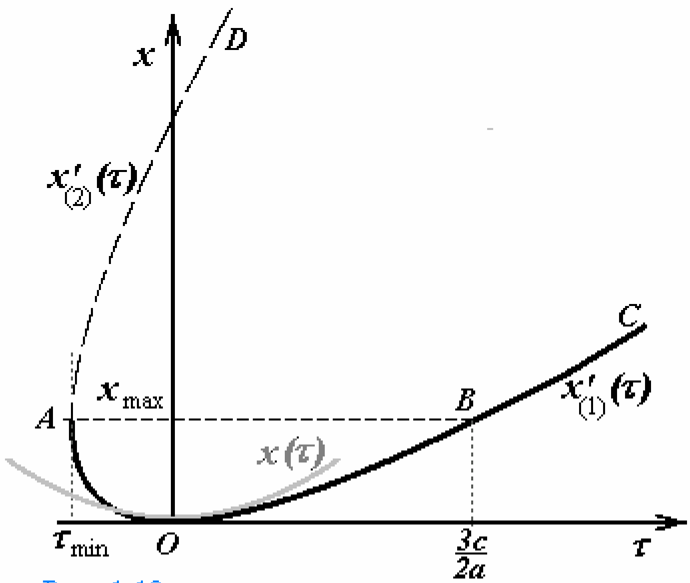


Рис. 1.12

Рассмотрите также физический смысл всех ветвей, соотнесите их с результатами проведенного качественного анализа. Для подсказки эти ветви обозначены на рис. 1.11 и 1.12 одинаково. А по существу, на них изображена одна и та же парабола, только повернутая и немного деформированная.