10 класс.

Задание 1. «Просто разминка»

1.1 Очевидно, что скорость трактора равна $V = \frac{V_0}{2} = 1{,}0\frac{м}{с}$.

1.2 Дальность полета снаряда, выпущенного из неподвижного орудия, определяется формулой

$$S_0 = \frac{2V_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\ . \qquad (1)$$

где V_0 - скорость снаряда относительно ствола.

Чтобы достичь максимальной дальности, выстрел, очевидно, необходимо производить в направлении движения платформы. В этом случае к горизонтальной составляющей скорости снаряда относительно пушки добавится скорость движения платформы, поэтому закон движения снаряда будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= \left(V_0\cos\alpha + v_1\right)t \\ y &= V_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \qquad (2)$$

Определим время полета снаряда (из условия $y = 0$): $t_1 = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}$ и подставим его в выражение для горизонтальной координаты для определения дальности полета

$$S_1 = \left(V_0\cos\alpha + v_1\right)\frac{2V_0\sin\alpha}{g} = \frac{2V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\left(1 + \frac{v_1}{V_0\cos\alpha}\right).$$

Таким образом, относительное увеличение дальности полета составит

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{v_1}{V_0\cos\alpha} = 10\%$$

При наличии понимания, решение может быть получено почти мгновенно:

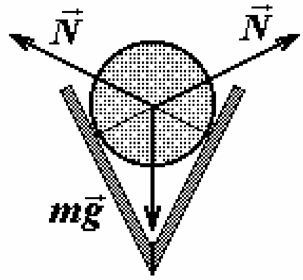
- так как время полета снаряда определяется только вертикальной составляющей скорости, то оно не зависит от скорости платформы;

- дальность полета (при постоянном времени движения) пропорциональна горизонтальной составляющей скорости снаряда;

- следовательно, $\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{\left(V_0\cos\alpha + v_1\right) - V_0\cos\alpha}{V_0\cos\alpha} = \frac{v_1}{V_0\cos\alpha} = 10\%$.

1.3 Чтобы сдвинуть цилиндр, к нему необходимо приложить силу, превышающую силу трения.

Изобразим силы, действующие на цилиндр в проекции на вертикальную плоскость. Так как силы реакции направлены перпендикулярно поверхности, то тройка сил: две силы реакции и сила тяжести направлены под равными углами $120°$ друг к другу. Так проекция ускорения на вертикальную плоскость равна нулю, то сумма изображенных сил также равна нулю. Следовательно, модули этих сил равны, то есть $N = mg$. Таким образом, суммарная сила трения (и искомая сила) равна $F_{тр} = 2\mu N = 2\mu mg = 12H$.



1.4 Суммарная сила давления воды на дно и стенки сосуда по модулю равна силе тяжести и направлена в противоположную сторону: $\rho ghS + F_{ст.} = mg$. Из этого уравнения находим $F_{ст.} = mg - \rho ghS \approx -10H$, т.е. эта сила направлена вверх.

1.5 Обозначим начальную скорость второго шарика u_0 и найдем скорости шариков v_1 и v_2 после первого столкновения (Рис.1), используя уравнения законов сохранения импульса и механической энергии

$$m_2 u_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{1}$$

$$\frac{m_2 u_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{2}$$

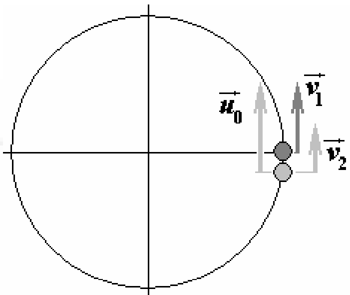


Рис. 1

Для быстрого решения этой системы уравнений перепишем ее в виде

$$m_2(u_0 - v_2) = m_1 v_1, \tag{3}$$

$$m_2(u_0^2 - v_2^2) = m_1 v_1^2. \tag{4}$$

и разделим второе уравнение на первое. При этом мы, конечно, теряем одно решение системы

$$v_2 = u_0,\ v_1 = 0, \tag{5}$$

но это решение соответствует начальным условиям – скоростям шарика до удара, а нам необходимо второе решение:

$$u_0 + v_2 = v_1.$$

Подстановка этого соотношение в уравнение (1) позволяет легко найти интересующее нас решение

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} u_0, \qquad v_1 = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} u_0. \tag{6}$$

Понятно, что скорость первого шарика больше скорости второго, поэтому, совершив полный оборот, первый шарик догонит второй в некоторой точке A_1, повернутой относительно исходной на некоторый угол φ (Рис. 1).

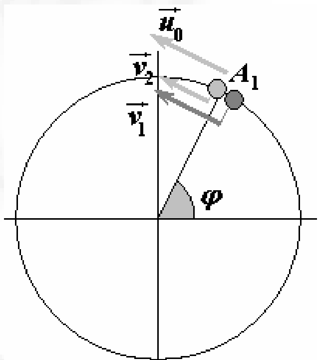


Рис.2

Для определения этого угла заметим, что до второго удара первый шарик пройдет путь

$$S_1 = (2\pi + \varphi)R \tag{7}$$

за время

$$t_1 = \frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1}. \tag{8}$$

Аналогично, для второго шарика можно записать

$$S_2 = \varphi R, \quad t_2 = \frac{\varphi R}{v_1}. \tag{9}$$

Приравнивая времена движения шариков, получим уравнение

$$\frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1} = \frac{\varphi R}{v_2}. \tag{10}$$

из которого определим искомый угол φ, задающий положение точки столкновения

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1}. \tag{11}$$

Вычислим значение этого угла, используя выражения для скоростей (6)

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2m_2}{m_2 - m_1} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2 \cdot 30}{30 - 20} - 1} \approx \frac{2}{5}\pi \,. \qquad (12)$$

Таким образом, мы определили точку второго столкновения. Для определения скоростей шариков после этого удара, следует составить систему уравнений, аналогичную (1)-(2). Однако подробно ее решать нет необходимости, так как ответ почти очевиден: если при начальных условиях (5) решением выражаются формулами (6), то теперь (6) являются начальными условиями, следовательно, решение выражается формулами (5). Иными словами, после второго удара шарики восстановят свои начальные скорости – второй будет двигаться со скоростью u_0, а первый остановится! После второго удара второй шарик сделает полный оборот и столкнется с первым в той же точке A_1. После этого повторится рассмотренная ситуация (только повернутая на угол φ): первый догоняет второй и т.д. Эти рассуждения позволяют указать точки всех столкновений шариков (Рис.3) . Простым перечислением легко определить, что тринадцатое столкновение произойдет в точке, повернутой относительно исходного положения на угол, равный

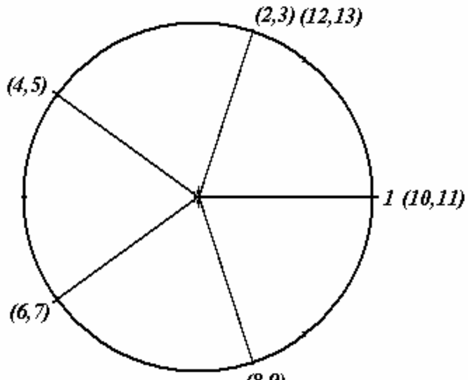


Рис. 3

$$\varphi_{13} = \frac{1}{5}\pi \approx 72^\circ \,.$$