Задание 2. «Вес и сжатие»

1. **«Самосжатие»**

1.1 Рассмотрим слой воды малой толщины Δh_i, находящийся на глубине h_i. Уменьшение объема ΔV_i рассматриваемого слоя вследствие сжимаемости жидкости запишем как

$$\Delta V_i = V_0(1-\beta \cdot p) - V_0 = -V_0\beta p = -S\Delta h_i \beta p,$$

где S — площадь рассматриваемого слоя.

Для оценки будем считать, что плотность жидкости остается приблизительно постоянной, тогда толщина сжатого слоя $\Delta h_i{}^*$

$$\Delta h_i{}^* = \Delta h_i(1-\beta \cdot p) = \Delta h_i(1-\beta \cdot \rho_0 g h_i),$$

где ρ_0 — плотность несжатой жидкости, g — ускорение свободного падения.

Соответственно, уменьшение δh_i его высоты вследствие эффекта самосжатия найдем как

$$\delta h_i = \rho_0 g \beta h_i \Delta h_i \tag{1}$$

Для нахождения полного сжатия ΔH всей жидкости просуммируем (1) по всем глубинам h_i

$$\Delta H = \sum_i \delta h_i = \sum_i \rho_0 g \beta h_i \Delta h_i = \rho_0 g \beta \sum_i h_i \Delta h_i = \rho_0 g \beta \frac{H^2}{2}. \tag{2}$$

Расчет для мирового океана дает

$$\Delta H = 238\,\text{м}.$$

1.2 **«Плотность»** С учетом эффекта самосжатия найдем плотность ρ реальной жидкости на глубине h

$$\rho(h) = \frac{m_i}{V_i} = \frac{m_i}{V_0(1-\beta p_i)} = \frac{m_i}{V_0(1-\beta \rho_0 g h)} \approx \rho_0(1+\beta\rho_0 g h). \tag{3}$$

В (2) учтено, что параметр β (сжимаемость воды) очень мал, поэтому можно с достаточной точностью использовать приближение для малых x

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x.$$

Соответственно, относительное увеличение плотности воды в процентах на глубине H найдем как

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \cdot 100\% = \beta\rho_0 g H \cdot 100\% = 4{,}76\%. \tag{4}$$

Поскольку данные в условии задачи приведены с точностью до трех значащих цифр, то в ответе (4) (и далее!) мы также будем оставлять три значащие цифры.

Как видим из (4) даже при больших глубинах мирового океана относительное изменение плотности морской воды незначительно и составляет несколько процентов. Это позволяет считать жидкости практически несжимаемыми при решении ряда прикладных задач.

1.3 **«Давление»** Для вычисления давления $p(h)$ реальной жидкости на глубине h необходимо просуммировать давления, создаваемые более высокими тонкими слоями Δh_i, которые, согласно закону Паскаля, передаются нижним слоям

$$p(h) = \sum_i p_i = \sum_i \rho_i g \Delta h_i = g \sum_i \rho_i \Delta h_i \,, \qquad (5)$$

где ρ_i — плотность жидкости на глубине i- го слоя.

Сумма в выражении (4), есть площадь S под графиком $\rho(h)$ зависимости (2) плотности жидкости от глубины, т.е. площадь трапеции (рис. 02).

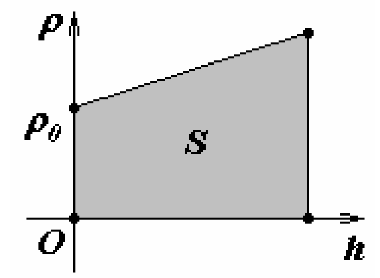

Рис. 02

Следовательно

$$p(h) = \frac{\rho_0 + \rho_0(1 + \beta\rho_0 g h)}{2} h = \rho_0 g h (1 + \frac{\rho_0 g \beta}{2} h). \quad (6)$$

Из (6) следует, что искомая зависимость представляет собой параболу с малым коэффициентом нелинейности.

С учетом того, что атмосферное давление p_0 также передается по закону Паскаля, окончательно получим

$$p(h) = p_0 + \rho_0 g h (1 + \frac{\rho_0 g \beta}{2} h). \qquad (7)$$

1.4 **«Утонувший летучий голландец»** Предмет перестанет тонуть и будет находится в состоянии устойчивого равновесия на некоторой глубине при условии, что его плотность будет равна плотности морской воды на этой глубине.

Следовательно, плотность утонувшего летучего голландца можно найти, подставив в выражение (3) искомую глубину $h = 5{,}00\,км$

$$\rho(h) = \rho_0(1 + \beta\rho_0 g h).$$

Расчет с точностью до трех значащих цифр дает

$$\rho_1 = 1{,}05 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}.$$

2. **«Заряженная жидкость»** В данном пункте рассматривается несжимаемая жидкость.

2.1 Рассмотрим верхний слой жидкости глубиной h (рис. 03). Действующая на него сверху сила атмосферного давления $p_0 S$ и сила его тяжести $F_1 = \rho g h S$ уравновешиваются силой давления снизу $p(h)S$ и силой электростатического отталкивания $\vec{F}_2$ слоя толщиной h слоем толщиной ($H - h$).

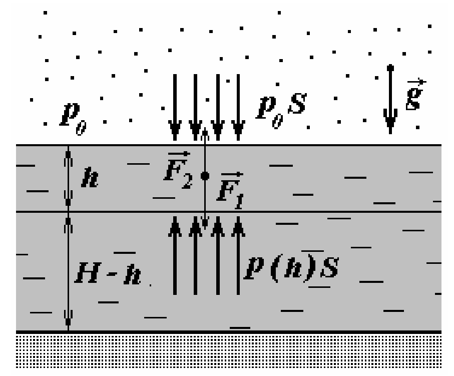

Рис. 03

Напряженность электростатического поля, создаваемого слоем толщиной ($H - h$) вне его может быть найдена, как

$$E(H-h) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\gamma(H-h)}{2\varepsilon_0}.$$

Заряд слоя толщиной h найдем по определению объемной плотности заряда

$$q(h) = \gamma \cdot V = \gamma h S.$$

Следовательно, сила электростатического отталкивания верхнего слоя нижним равна

$$F_2 = E(H-h)\cdot q(h) = \gamma^2 \frac{(H-h)}{2\varepsilon_0} hS \,. \qquad (8)$$

В результате условие равновесия слоя глубиной h примет вид

$$p_0 S + \rho g h S = \gamma^2 \frac{(H-h)}{2\varepsilon_0} hS + p(h)S \,.$$

Сокращая в последнем выражении на площадь S слоя, получим искомую зависимость давления в заряженной жидкости от глубины

$$p(h) = p_0 + (\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})h + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} h^2 \,. \qquad (9)$$

2.2 Выражение (8) представляет собой квадратичную зависимость (параболу), ветви которой направлены вверх.

При малых h ($h \to 0$) ее «поведение» определяется линейным членом, который, в зависимости от толщины пластины H может быть как положительным, так и отрицательным. При максимально возможной толщине пластины H_{max} линейный член должен быть равен нулю.

При этом верхние слои жидкости станут невесомы, т.е. $p(h \to 0) \approx p_0$. Отсюда найдем

$$\rho g = \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad H_{max} = \frac{2\rho g \varepsilon_0}{\gamma^2} \,. \qquad (10)$$

При дальнейшем увеличении толщины заряженного слоя верхние частицы жидкости будут отрываться и улетать вверх, образуя «электрическое испарение».

2.3 Кубик некоторой массы, погруженный в заряженную жидкость, будет находиться в равновесии, если сила его тяжести будет уравновешена силой Архимеда.

Погружение кубика в заряженную жидкость не изменит распределения ее давления в нижележащих слоях.

Это позволяет записать следующее уравнение

$$mg = ((\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} a^2) \cdot a^2 \,.$$

Отсюда найдем искомое значение массы кубика

$$m = \frac{((\rho g - \frac{\gamma^2 H}{2\varepsilon_0})a + \frac{\gamma^2}{2\varepsilon_0} a^2) \cdot a^2}{g} \,. \qquad (11)$$