Задание 3. «Осторожней на поворотах»

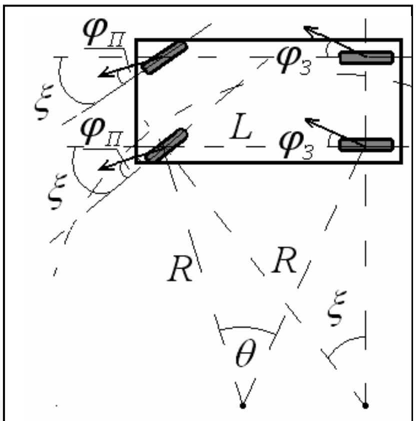

Рис. 1

1. Легко заметить из рисунка 1, что наличие угла увода у передних колёс уменьшает угол поворота, а у задних – увеличивает. Т.е.

$$\theta = \xi - \varphi_П + \varphi_З \tag{1}$$

2. Нагрузки на колёса равны силам реакции дороги на эти колёса. Для нахождения этих величин необходимо записать второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось, а также уравнения для равенства моментов относительно нескольких осей, чтобы получить четыре независимых уравнения. Однако можно поступить проще. Если автомобиль покоится, то силы реакции определить не трудно:

$$\begin{aligned} N^0_{ПЛ} &= N^0_{ПП} = \frac{1}{2}\frac{Mgb}{L} \\ N^0_{ЗЛ} &= N^0_{ЗП} = \frac{1}{2}\frac{Mga}{L} \end{aligned} \tag{2}$$

При левом повороте, к правым колёсам приложится дополнительная нагрузка $\Delta N = \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d}$, а сила, действующая на левые колёса, наоборот уменьшится на эту величину. Получим:

$$\begin{aligned} N_{ПЛ} &= \frac{1}{2}\frac{Mgb}{L} - \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d} \\ N_{ПП} &= \frac{1}{2}\frac{Mgb}{L} + \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d} \\ N_{ЗЛ} &= \frac{1}{2}\frac{Mga}{L} - \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d} \\ N_{ЗП} &= \frac{1}{2}\frac{Mga}{L} + \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{R}\frac{h}{d} \end{aligned} \tag{3}$$

3. Запишем условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$\left(F_{ПЛ} + F_{ПП}\right)\cdot a = \left(F_{ЗЛ} + F_{ЗП}\right)\cdot b \tag{4}$$

т.е. автомобиль не вращается. Подставляя значения сил, получим:

$$\left(k\varphi_П N_{ПЛ} + k\varphi_П N_{ПП}\right)\cdot a = \left(k\varphi_З N_{ЗЛ} + k\varphi_З N_{ЗП}\right)\cdot b \tag{5}$$

или

$$\varphi_П \cdot a \cdot \left(N_{ПЛ} + N_{ПП}\right) = \varphi_П \cdot b \cdot \left(N_{ПЛ} + N_{ПП}\right) \tag{6}$$

Подставив значения нагрузок, получим:

$$\varphi_П = \varphi_З \tag{7}$$

а значит

$$\theta = \xi \tag{8}$$

– нейтральная поворачиваемость.

4. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота»:

$$F_{ПП} + F_{ПЛ} + F_{ЗЛ} + F_{ЗП} = \frac{Mv^2}{R} \tag{9}$$

или, подставляя значения сил, и учитывая, что $\varphi_П = \varphi_З = \varphi_{кр}$,

$$kMg\varphi_{кр} = \frac{Mv^2}{R} \quad (10).$$

Максимальная скорость равна

$$v_{\max} = \sqrt{k\varphi_{кр} Rg} \quad (11).$$

5. Рассмотрим движение в левом повороте. При наличии схождения передних колёс, углы увода левого и правого колёс отличаются от некоторого среднего значения $\varphi_П$ на величину δ, т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{ПП} &= \varphi_П + \delta \\ \varphi_{ПЛ} &= \varphi_П - \delta \end{aligned} \quad (12).$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось «центр тяжести автомобиля – центр кривизны поворота» и условие равенства моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$\begin{cases} kN_{ПЛ}(\varphi_П - \delta) + kN_{ПП}(\varphi_П + \delta) + k\varphi_З(N_{ЗЛ} + N_{ЗП}) = \dfrac{Mv^2}{R} \\ (kN_{ПЛ}(\varphi_П - \delta) + kN_{ПП}(\varphi_П + \delta)) \cdot a = k\varphi_З(N_{ЗЛ} + N_{ЗП}) \cdot b \end{cases} \quad (13).$$

Решение системы:

$$\varphi_З = \frac{v^2}{gkR} \text{ и } \varphi_П = \frac{v^2}{gkR} - \delta\frac{v^2 hL}{Rdgb} \quad (14).$$

Угол поворота:

$$\theta = \xi - \varphi_П + \varphi_З = \xi + \delta\frac{v^2 hL}{Rdgb} \quad (15).$$

Необходимо учесть, что $R = \dfrac{L}{\theta}$, тогда

$$\theta = \xi + \delta\frac{v^2 h}{dgb}\theta \quad (16).$$

Выражая θ, получим:

$$\theta = \frac{\xi}{1 - \delta\dfrac{v^2 h}{dgb}} \quad (17).$$

Делаем вывод: при положительном δ $\theta > \xi$ – автомобиль обладает избыточной поворачиваемостью, при $\delta < 0$ – недостаточной.

6. При определённой скорости движения знаменатель в формуле (17) обращается в нуль. Это значит, что при малейшем движении руля, угол поворота становится очень большим и автомобиль разворачивается. Значение критической скорости:

$$v_{crit} = \sqrt{\frac{dgb}{\delta \cdot h}} \quad (18).$$

7. По-прежнему рассматриваем левый поворот. Необходимо определить, какое колесо первым потеряет сцепления с дорогой. Предположим, что это будут задние колёса. Для того чтобы это произошло, необходимо, чтобы

$$v^2 = \varphi_{кр} gkR \quad (19).$$

В этом случае значение максимальной скорости совпадает со значением, полученным в пункте 4:

$$v_{\max} = \sqrt{k\varphi_{кр} Rg} \quad (20)$$

Однако необходимо проанализировать, действительно ли задние колёса сорвутся первыми. Единственным «конкурентом» является переднее правое колесо.

Подставим значение (19) в формулу (14) для $\varphi_{П}$.

$$\varphi_{П} = \varphi_{кр} - \delta \frac{\varphi_{кр} khL}{db} \quad (21).$$

Для переднего правого колеса:

$$\varphi_{ПП} = \varphi_{П} + \delta = \varphi_{кр} - \delta \frac{\varphi_{кр} khL}{db} + \delta = \varphi_{кр} + \delta\left(1 - \frac{\varphi_{кр} khL}{db}\right) \quad (22).$$

Из формулы (21) делаем вывод, что при

$$\varphi_{кр} khL < db \quad (23)$$

значение $\varphi_{ПП}$ будет больше $\varphi_{кр}$, т.е. первым сорвется переднее правое колесо, после чего процесс станет необратимым. Для нахождения критической скорости, запишем условие достижения критического угла увода передним правым колесом.

$$\varphi_{кр} = \frac{v^2}{gkR} + \delta\left(1 - \frac{v^2 hL}{Rdgb}\right) \quad (24).$$

Выражая v, получим:

$$v'_{\max} = \sqrt{\frac{kRg(\varphi_{кр} - \delta)}{1 - \delta \frac{hLk}{db}}} \quad (25).$$

Заметим, что если $\varphi_{кр} khL < db$, то и $\delta \cdot khL < db$.

Таким образом, максимальная скорость определяется либо срывом задних колёс, либо срывом переднего правого колеса в зависимости от соотношения между величинами (23).