11 класс.

Задача 1. «Взрывная эмиссия»

1. Концентрация электронов.

Один моль платины имеет массу μ и занимает объем $V = \mu / \rho$, при этом в нем находится N_A атомов. Если от каждого атома в зону проводимости перешел один электрон, то в одном моле платины будет N_A электронов, а их концентрация будет равна

$$\boxed{n = N_A / V_m = \frac{N_A \rho}{\mu}} \qquad (1)$$

$$\boxed{n = 6{,}62 \cdot 10^{28}\, м^{-3}} \qquad (2)$$

При такой большой концентрации электроны не покидают металл, потому что на них действуют силы притяжения со стороны положительно заряженных ионов металла. Другими словами, энергия электронов в металле меньше, чем их энергия в вакууме.

Для того чтобы электрон покинул металл, надо сообщить ему дополнительную энергию, например, повысив температуру металла. Эмиссию электронов под действием электрического поля позволяет объяснить только квантовая механика.

2. Электрическое поле.

Точное нахождение электрического поля вблизи поверхности металла при известном потенциале – достаточно сложная задача, но приближенно можно показать связь напряженности и потенциала на примере металлической сферы. Если на сфере радиусом r находится заряд Q, то напряженность электрического поля у поверхности

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

а потенциал

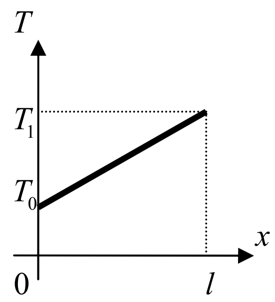
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Как видно,

$$\boxed{E = \frac{\varphi}{r}}. \qquad (3)$$

Вблизи острия металлической иголочки данное равенство выполняется только приближенно, но можно использовать его для оценки напряженности электрического поля.

3. Теплопроводность.



3.1. Так как стержень однородный и нет источников теплоты внутри стержня, то поток теплоты в любом сечении его одинаков, т.е.

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx} = const$$

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = C} \qquad (4)$$

$$\int_{T_0}^{T} dT = C \int_0^x dx$$

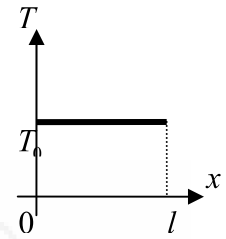
$$T(x) = T_0 + Cx\,,$$

причем на торце $x = l$ $T(l) = T_1$, поэтому $C = \dfrac{T_1 - T_2}{l}$

$$\boxed{T(x) = T_0 + \frac{x}{l}(T_1 - T_0)} \qquad (5)$$

График этой зависимости – прямая линия.

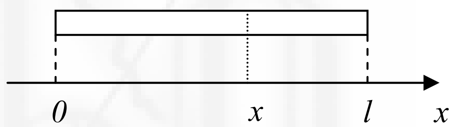
3.2. Если стержень теплоизолирован и на одном из концов поддерживается постоянная температура T_0, то никакого потока тепла в этом стрежне нет и температура по всей длине стержня постоянна и равна



$$\boxed{T(x) = T_0}. \qquad (6)$$

3.3. Поскольку стержень теплоизолирован, то в установившемся режиме (то есть, когда температура перестанет изменяться) для теплового баланса необходимо, чтобы вся теплота, выделяющаяся правее некоторой точки x стержня (то есть, с части стержня длиной $l - x$), отводилась путем теплопередачи.

Уравнение теплового баланса



$$\boxed{P_{тепл} + qS = 0} \qquad (7)$$

$$(l - x)Sw - \kappa\frac{dT}{dx}S = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = (l - x)\frac{w}{\kappa}$$

$$\int_{T_0}^{T} dT = \int_0^x \frac{w}{\kappa}(l - x)dx$$

$$\boxed{T(x) = T_0 + \frac{w}{\kappa}lx - \frac{w}{\kappa}\frac{x^2}{2} = T_0 + \frac{w}{\kappa}x(l - \frac{x}{2})} \qquad (8)$$

Температура правого торца стержня равна

$$\boxed{T_l = T_0 + \frac{wl^2}{2\kappa}} \qquad (9)$$

3.4. Если по стержню течет ток плотностью j, то по закону Джоуля-Ленца в дифференциальной форме в единице объема в единицу времени выделяется теплота

$$\boxed{w = \gamma j^2}. \qquad (10)$$

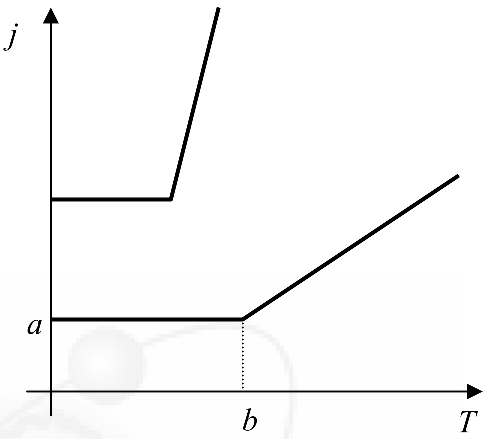
Соответственно, температура правого торца стрежня будет равна

$$\boxed{T_l = T_0 + \frac{\gamma j^2 l^2}{2\kappa}} \qquad (11)$$

4. Эмиссия электронов.

4.1. Зависимость $j(T)=\begin{cases} a, & T<b \\ a+k(T-b), & T\ge b \end{cases}$ - кусочно-линейная, причем коэффициент a показывает, насколько график приподнят над осью абсцисс, коэффициент b показывает температуру излома, а коэффициент k - угловой коэффициент для наклонного участка графика. С ростом напряженности электрического поля вблизи поверхности металла коэффициент a увеличивается, коэффициент b уменьшается, а коэффициент k увеличивается.

График зависимости $j(T)$ при двух значениях напряженности показан на рисунке.



4.2. Если потенциал катода равен $\varphi=-50\cdot10^3 B$, то напряженность поля вблизи острия иголочки равна $E=5\cdot10^9\ {}^{B}\!/\!{}_{м}$. Значения коэффициентов равны $a=4{,}06\cdot10^7\ {}^{A}\!/\!{}_{м^2}$, $b=1900K$, $k=3{,}49\cdot10^4\ {}^{A}\!/\!{}_{м^2K}$.

<u>Тепло, выделяющееся в иголочке при протекании по ней тока, вызывает нагрев. В установившемся режиме вся выделяющаяся теплота отводится за счет теплопередачи</u>. При протекании тока плотностью j температура острия будет равна $T=T_0+\dfrac{\gamma j^2 l^2}{2\kappa}$ (см. п. 3.4).

Можем выразить плотность тока в зависимости от температуры острия

$$j=\sqrt{\frac{2\kappa}{\gamma l^2}(T-T_0)}$$

Смысл этого соотношения: чтобы температура острия была равна T, по иголочке должен течь ток плотностью j.

Поскольку эмиссия происходит с поверхности полусферы площадью $2\pi r^2$, а поперечное сечение иголочки равно πr^2, при этом сила тока одинакова что внутри иголки, что с поверхности острия, то плотность тока внутри иголки и на поверхности острия отличаются в два раза:

$$\pi r^2 j_{внутри}=2\pi r^2 j_{поверхн}$$

$$\boxed{j_{внутри}=2j_{поверхн}}. \qquad (12)$$

Соответственно, для того, чтобы температура острия была равна T, с поверхности должен стекать такой ток, что

$$2j_{поверхн}=\sqrt{\frac{2\kappa}{\gamma l^2}(T-T_0)}$$

$$j_{поверхн}=\sqrt{\frac{\kappa}{2\gamma l^2}(T-T_0)}$$

Для удобства дальнейшей работы обозначим коэффициент $\chi=\sqrt{\dfrac{\kappa}{2\gamma l^2}}=3{,}61\cdot10^7\ {}^{A}\!/\!{}_{м^2K^{1/2}}$

Плотность тока эмиссии j_1 определяется температурой острия T

$$j_1(T) = \begin{cases} a, & T < b \\ a + k(T-b), & T \geq b \end{cases}$$

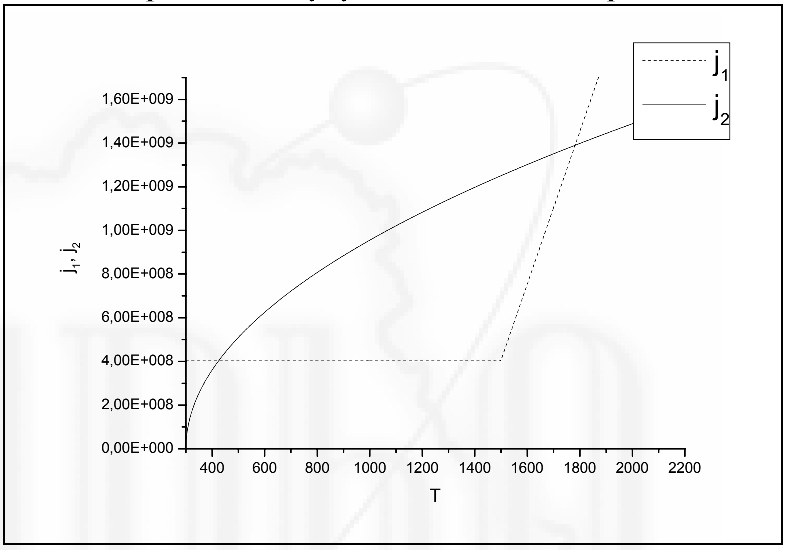
А плотность тока j_2, который должен стекать с острия, чтобы на нем была температура T, определяемая теплопередачей

$$j_2(T) = \chi\sqrt{T - T_0}$$

Очевидно, что это одна и та же плотность тока, поэтому температура стационарного состояния определяется уравнением

$$\boxed{j_1(T) = j_2(T)} \qquad (13)$$

Построим обе функции на графике, точки пересечения будут соответствовать решениям.



Решения два. Рассмотрим первое, которое соответствует меньшей температуре. Если вдруг случайно температура увеличится, то плотность тока эмиссии не изменится, а вот потери теплоты возрастут (для поддержания температуры требуется большая плотность тока), и острие иголки начнет охлаждаться. Если вдруг температура острия уменьшится, то потери теплоты тоже уменьшатся, но ток эмиссии будет тем же, поэтому иголка начнет нагреваться. Это решение устойчиво, потому что отклонения температуры от стационарной приводят к процессам, возвращающим иголку к равновесной температуре.

Решение же, соответствующее большей температуре, неустойчиво. Стоит только температуре случайно увеличиться, как ток эмиссии станет больше, а увеличение потерь теплоты не сможет компенсировать увеличение выделяющегося джоулева тепла. Это приведет ещё большему разогреву иголочки – температура уходит от равновесного значения.

На практике, если не создать специальных условий, при небольших плотностях тока реализуется только устойчивое решение, ведь нагрев иголки от комнатной температуры производится при помощи протекающего тока.

Найдем это значение температуры T_l. Условие (13) превращается в

$$a = \chi\sqrt{T_l - T_0}$$

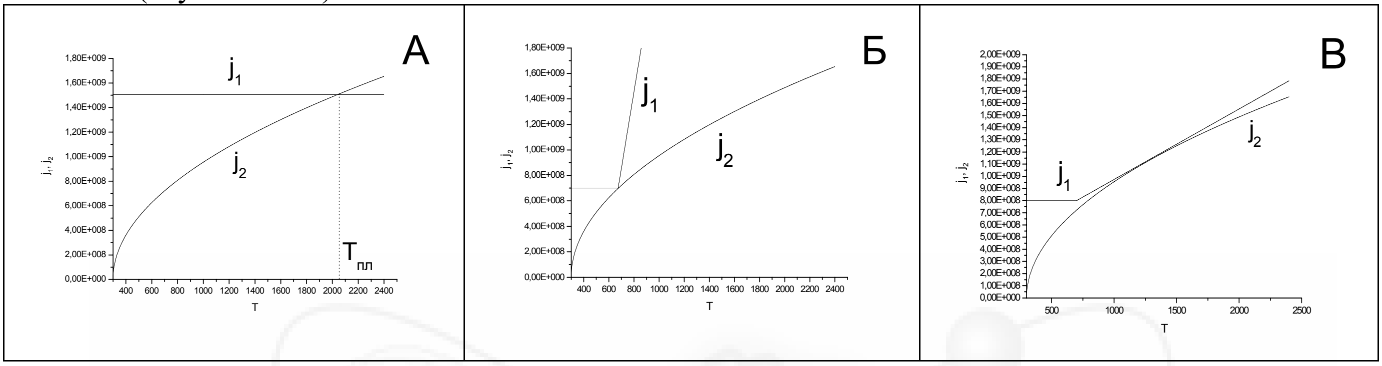
$$\boxed{T_l = T_0 + \frac{a^2}{\chi^2}} \qquad (14)$$

$$\boxed{T_l = 301{,}3K} \qquad (15)$$

Примечание.

Не обязательно строить именно графики $j_1(T)$ и $j_2(T)$, можно построить их квадраты, но рассуждения при этом будут аналогичными, и численные ответы получатся такими же.

4.3. Значения коэффициентов a, b, k зависят от напряженности электрического поля, соответственно, от потенциала катода. При некотором значении потенциала возникнет критическая ситуация, когда потери тепла на теплопроводность не смогут остановить разогрев, температура достигнет температуры плавления и наступит разрушение острия иголки. Это может наступить, если устойчивое решение уравнения (13) станет равным температуре плавления (случай А) или если $j_1(T) \geq j_2(T)$ для любой температуры T, что соответствует касанию графиков в одной точке, что может произойти двумя способами (случай Б и В).



Выясним, какой случай реализуется в нашей задаче. Реализоваться может только один из трех возможных случаев, поскольку функции $a(E), b(E), k(E)$ монотонные, причем $a(E), k(E)$ экспоненциально быстро возрастают.

График $j_1(T)$ - это «уголок». Выясним, какие положения на графике может занимать вершина угла. При напряженности электрического поля E положение вершины угла на графике – это точка $(b(E), a(E))$.

Система

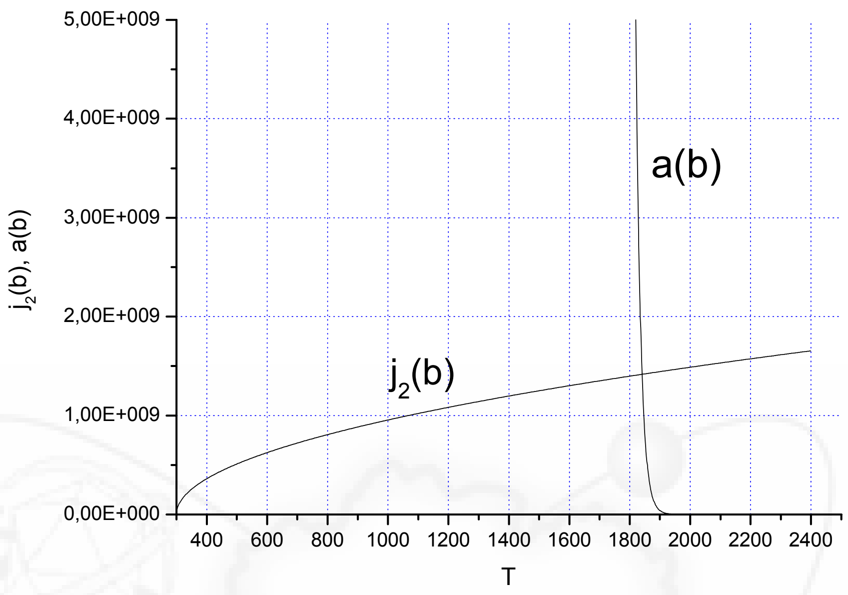
$$a = a_1 \exp(a_2 E)$$
$$b = b_1 - b_2 E$$

задает положение вершины «уголка» в параметрическом виде. Можно построить по точкам график возможных положений вершины угла, задавая разные значения напряженности электрического поля. Можно заметить, что коэффициент b, у которого размерность температуры, линейно связана с E, поэтому

$$E = \frac{b_1 - b}{b_2}$$

$$a = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - b)\right)$$

Построим на одном графике $j_2(b)$ и $a(b)$.



По графику сразу видно, что случай в этой задаче не реализуется, поскольку вершина уголка пересекает график $j_2(b)$ при температуре, меньшей температуры плавления платины $T_{пл} = 2045K$.

Скорее всего, мы имеем дело со случаем Б, но это надо доказать. Для того чтобы действительно реализовался случай А, необходимо, чтобы вершина уголка совпадала с одной из точек $j_2(T)$, то есть

$$b = T^*$$
$$a = \chi\sqrt{T^* - T_0}$$

и график $j_1(T)$ шел круче, чем $j_2(T)$, то есть

$$\boxed{k > \left.\frac{dj_2}{dT}\right|_{T=T^*} = \frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}}} \tag{16}$$

Температуру, соответствующую решению T^*, можно найти графически, если аккуратно построить график, а можно найти аналитически, ведь

$$a = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - b)\right).$$

Тогда

$$\chi\sqrt{T^* - T_0} = a_1 \exp\left(\frac{a_2}{b_2}(b_1 - T^*)\right)$$
$$T^* = T_0 + \frac{a_1^2}{\chi^2}\exp\left(\frac{2a_2}{b_2}(b_1 - T^*)\right).$$

Это уравнение аналитически не решается, но можно воспользоваться методом последовательных приближений. При этом необходимо соблюдать осторожность, поскольку использование метода по формуле $T^{*(k+1)} = T_0 + \frac{a_1^2}{\chi^2}\exp\left(\frac{2a_2}{b_2}(b_1 - T^{*(k)})\right)$ не дает решение, потому что метод расходится. Необходимо сделать небольшие математические преобразования и применять метод по формуле $T^{*(k+1)} = \left(b_1 - \frac{b_2}{2a_2}\ln\left(\frac{\chi^2}{a_1^2}(T^{*(k)} - T_0)\right)\right)$.

Метод очень быстро сходится и даже если взять начальное приближение $T^{*(0)} = 1800K$, уже после первой итерации получается правильный ответ

$$\boxed{T^* = 1840,8K} \qquad (17)$$

Эта температура соответствует напряженности электрического поля

$$E^* = \frac{b_1 - T^*}{b_2} = 8,5 \cdot 10^9 \, В/м$$

при этом величина критического потенциала равна (с точностью до знака)

$$\boxed{\varphi_{кр} = 85кВ} \qquad (18)$$

Но ещё необходимо проверить условие (). При напряженности поля $E^* = 8,5 \cdot 10^9 \, В/м$, коэффициент $k = 9,33 \cdot 10^5 \, А/м^2К$, а $\frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}} = 4,60 \cdot 10^5 \, А/м^2К$.

Поскольку

$$\boxed{k > \left.\frac{dj_2}{dT}\right|_{T=T*} = \frac{\chi}{2\sqrt{T^* - T_0}}}, \qquad (19)$$

то действительно реализуется случай Б.

4.4. При подаче на катод потенциала $\varphi = 130кВ$ напряженность электрического поля вблизи острия принимает значение $E = 1,3 \cdot 10^{10} \, В/м$. Значения коэффициентов при данной напряженности равны $a = 1,31 \cdot 10^{11} \, А/м^2$, $b = 1721K$, $k = 6,39 \cdot 10^7 \, А/м^2К$.

Плотность тока сразу после включения, пока иголочка не успела разогреться до температуры b, равняется

$$\boxed{j_1 = a = 1,31 \cdot 10^{11} \, А/м^2}. \qquad (20)$$

Но даже при температуре плавления платины плотность тока

$$\boxed{j_2 = 1,51 \cdot 10^9 \, А/м^2}, \qquad (21)$$

что на два порядка меньше начальной плотности тока j_1. Это означает, что потерями теплоты на теплопроводность можно пренебречь и считать иголочку полностью теплоизолированной.

Выделяющаяся джоулева теплота идет только на нагревание иголочки. В таком случае уравнение теплового баланса

$$cm\Delta T = P_{Дж}\Delta t$$

$$c\rho V\Delta T = \gamma j^2 V\Delta t$$

В дифференциальном виде

$$\boxed{dt = \frac{c\rho}{\gamma j^2(T)} dT} \qquad (22)$$

$$t = \frac{c\rho}{\gamma} \int_{T_0}^{T_{пл}} \frac{dT}{j^2(T)}$$

Поскольку $j(T)$ - кусочно-линейная функция, то интеграл надо считать отдельно до точки b и после неё.

$$t_1 = \frac{c\rho}{\gamma} \int_{T_0}^{b} \frac{dT}{a^2} = \frac{c\rho}{\gamma a^2}\left(b - T_0\right)$$

$$t_2 = \frac{c\rho}{\gamma}\int\limits_b^{T_{пл}} \frac{dT}{[a+k(T-b)]^2} = \frac{c\rho}{\gamma k}\int\limits_b^{T_{пл}} \frac{d[a+k(T-b)]}{[a+k(T-b)]^2} = -\frac{c\rho}{\gamma k}\frac{1}{[a+k(T-b)]}\Bigg|_b^{T_{пл}} = \frac{c\rho}{\gamma k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{[a+k(T_{пл}-b)]}\right)$$

Время до взрыва равно

$$\boxed{t = \frac{c\rho}{\gamma a^2}\left(b-T_0\right)+\frac{c\rho}{\gamma k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{[a+k(T_{пл}-b)]}\right)} \quad (23)$$

$$\boxed{t = 2,6\cdot 10^{-6}c = 2,6мкс} \quad (24)$$

В течение времени до взрыва с острия иголочки идет достаточно большой ток. Явление взрывной эмиссии используют в генераторах очень мощных и очень коротких импульсов тока.