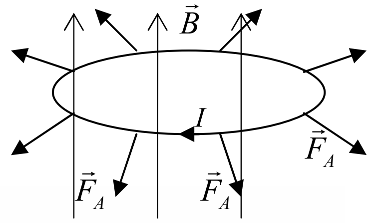
Задача 2 «Динамик»

1. Сила Ампера.

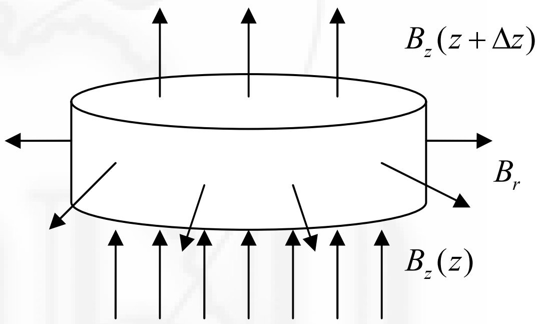
Очевидно, что если катушка с током находится в однородном вертикальном магнитном поле, то равнодействующая сил Ампера, действующих на разные части катушки, равна нулю.



<ins>Для возникновения ненулевой вертикальной составляющей силы Ампера необходимо, чтобы существовала радиальная составляющая магнитного поля – магнитное поле должно быть неоднородным. (1)</ins>

Определим радиальную составляющую магнитного поля. Выделим в пространстве воображаемый цилиндр, совпадающий с катушкой, высотой Δz и радиусом r. Полный магнитный поток через замкнутую поверхность цилиндра равен нулю

$$\Phi_B = 0 .$$



$$B_z(z+\Delta z)\pi r^2 + B_r 2\pi r\Delta z - B_z(z)\pi r^2 = 0$$

Отсюда $B_r = \dfrac{B_z(z) - B_z(z+\Delta z)}{2\Delta z} r = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_z}{dz}$.

$$\boxed{B_r = \frac{\alpha B_0 r}{2}} \qquad (2)$$

Тогда вертикальная составляющая силы Ампера, действующая на катушку, равна

$$\boxed{F_A = 2\pi rNIB_r = 2\pi rNI\frac{\alpha B_0 r}{2} = \alpha B_0 \pi r^2 NI} \qquad (3)$$

Поскольку магнитное поле симметрично относительно оси Oz, равнодействующая горизонтальных составляющих силы равна нулю.

2. Амплитуда колебаний.

Переменное напряжение, поданное на клеммы катушки, вызовет переменный ток в катушке, на нее начнет действовать сила Ампера, и катушка придет в движение. Рассмотрим силы, действующие на катушку.

1) Если собственная частота колебаний системы равна ω_0, то при отклонении катушки из положения равновесия на небольшое расстояние z, на нее будет действовать упругая возвращающая сила

$$F_{упр} = -kz = -m\omega_0^2 z .$$

Собственная частота колебаний для катушки равна $\omega_0 = 2\pi f_0 = 188 c^{-1}$.

2) Как было сказано в условии, при движении мембраны вместе с катушкой, создаются звуковые волны, при этом на мембрану действует сила сопротивления

$$F_{сопр} = -\beta v .$$

В данном случае коэффициент $\beta = \dfrac{2\gamma P_0 S}{c} = 26{,}4 \,{}^{кг}\!/\!_{c}$.

3) И ещё на катушку будет действовать сила Ампера, направление которой зависит от способа намотки катушки и направления тока в ней. Для определенности будем считать, что при приложении положительного постоянного напряжения ток течет так, что сила Ампера направлена вверх.

$$F_A = \alpha B_0 \pi r^2 NI .$$

Для удобства обозначим постоянный множитель перед силой тока $g = \alpha B_0 \pi r^2 N$. В данном случае $g = 3{,}14\, {}^{H}\!/_{A}$.

По второму закону Ньютона

$$ma = F_{упр} + F_{сопр} + F_A \tag{4}$$

$$ma = -m\omega_0{}^2 z - \beta v + gI$$

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0{}^2 z = gI \tag{5}$$

(точками сверху обозначены соответствующие производные по времени).

Рассмотрим, как связаны между собой сила тока и прикладываемое к катушке напряжение.

1) Внешняя ЭДС, прикладываемая к катушке равна

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t .$$

2) Переменное напряжение вызывает переменный ток, и в катушке, обладающей индуктивностью L, возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{си} = -L\frac{dI}{dt} .$$

3) При движении катушки в магнитном поле, магнитный поток через нее изменяется, что приводит к возникновению ЭДС индукции

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(N\pi r^2 B_0(1-\alpha z)\right) = \alpha B_0 \pi r^2 N\frac{dz}{dt} = g\dot{z}$$

По закону Ома для полной цепи

$$RI = \varepsilon + \varepsilon_{си} + \varepsilon_{инд} \tag{6}$$

$$RI = -L\frac{dI}{dt} + g\dot{z} + \varepsilon$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + g\dot{z} \tag{7}$$

Итого, получилась система из двух связанных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0{}^2 z = gI$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + g\dot{z}$$

Нас интересует решение, которое установится, в конце концов, при периодической внешней ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Ясно, что когда собственные колебания затухнут, сила тока и координата будут изменяться по гармоническому закону с такой же частотой, но другой начальной фазой.

В принципе, можно точно решить это уравнение, подставив в систему дифференциальных уравнений

$$I = I_0 \cos(\omega t + \phi) ,$$

$$z = A\cos(\omega t + \psi) ,$$

потом, продифференцировав, разложив тригонометрические функции и приравняв коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах, но это даст систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, решение которой весьма получится достаточно громоздким и отнимет много времени и сил. Но нетрудно заметить, что в если ток изменяется по закону $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, то амплитуда слагаемого RI будет равна RI_0, а амплитуда слагаемого $L\frac{dI}{dt}$ будет равна $\omega L I_0$. <u>Даже на предельной для человеческого уха частоте $f = 20 кГц$ величина $\omega L = 0.12 Ом$, тогда как</u>

$R = 4,0 Ом \gg 0,12 Ом$. Поэтому слагаемым $L\dfrac{dI}{dt}$ можно пренебречь, и система уравнений превращается в

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI$$

$$I = \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

Подставив ток в первое уравнение, получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами – уравнение вынужденных колебаний с затуханием:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = g\,\frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

$$m\ddot{z} + \left(\beta - \frac{g^2}{R}\right)\dot{z} + m\omega_0^2 z = \frac{g}{R}\varepsilon_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{z} + \frac{1}{m}\left(\beta - \frac{g^2}{R}\right)\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{g\varepsilon_0}{mR}\cos\omega t$$

Для удобства обозначим $\chi = \dfrac{1}{m}\left(\beta - \dfrac{g^2}{R}\right)$, $D = \dfrac{g\varepsilon_0}{mR}$.

Значение коэффициента $\chi = 479 c^{-1}$. Значение коэффициента $D = 15,7\, м/c^2$ при амплитуде внешнего напряжения $\varepsilon_0 = 1В$.

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{z} + \chi\dot{z} + \omega_0^2 z = D\cos\omega t \tag{8}$$

Нас интересует амплитуда напряжение. Решить это дифференциальное уравнение можно разными способами: подстановкой $z = A\cos(\omega t + \psi)$, методом векторных диаграмм или методом комплексных амплитуд – это дело вкуса. В результате получается

$$A(\omega) = \frac{D}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2}}\,. \tag{9}$$

Если подставить выражения для всех коэффициентов, то получится весьма громоздкое выражение

$$A(\omega) = \frac{\dfrac{\alpha B_0 \pi r^2 N \varepsilon_0}{mR}}{\left[(\omega^2 - (2\pi f_0)^2)^2 + (\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{2\gamma P_0 S}{c} - \dfrac{(\alpha B_0 \pi r^2 N)^2}{R}\right)\omega)^2\right]^{1/2}}, \tag{10}$$

поэтому допустимо оставить выражение для амплитуды в более простом виде (9), предварительно оценив все коэффициенты.

При вынужденных колебаниях с затуханием на некоторой частоте вблизи собственной наблюдается резонанс (максимум амплитуды), который наступает при минимуме знаменателя.

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2 = \min$$

Исследуем выражение на экстремум стандартным способом.

$$\frac{d}{d\omega}[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2] = 0$$

$$2(\omega^2 - \omega_0^2)2\omega + 2\chi^2\omega = 0$$

$$(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega = 0$$

Вторая производная исследуемой функции равна

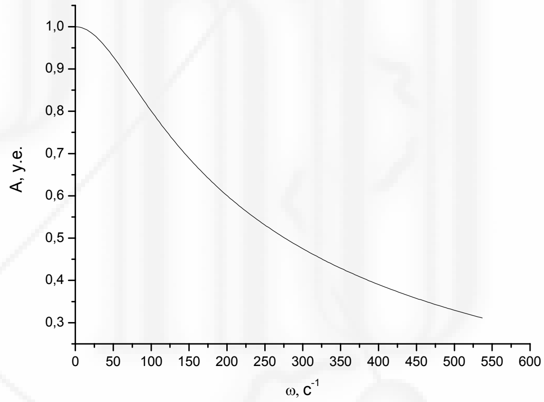
$$\frac{d}{d\omega}[(\omega^2-(\omega_0{}^2-\chi^2/2))\omega]=3\omega^2-(\omega_0{}^2-\chi^2/2)$$

У этого уравнения 3 корня $\omega_1=0$ и $\omega_{2,3}=\pm\sqrt{\omega_0{}^2-\chi^2/2}$, правда, отрицательный корень физического смысла в себе не несет.

При небольшом затухании ($\omega_0{}^2>\chi^2/2$) в точке $\omega_1=0$ локальный максимум (соответственно, минимум амплитуды), ведь вторая производная меньше нуля, а в точке $\omega_2=\sqrt{\omega_0{}^2-\chi^2/2}$ - локальный минимум (соответственно максимум амплитуды).

В случае же сильного затухания ($\omega_0{}^2<\chi^2/2$) ситуация коренным образом меняется, поскольку уравнение $(\omega^2-(\omega_0{}^2-\chi^2/2))\omega=0$ имеет только один действительный корень $\omega_1=0$, причем вторая производная в этой точке больше нуля, что означает минимум выражения и максимум амплитуды. Таким образом, <u>при сильном затухании резонанса не наблюдается, и максимальная амплитуда соответствует нулевой частоте.</u>

В нашем случае $\omega_0=188c^{-1}$, а $\chi=479c^{-1}$, соответственно мы имеем дело со случаем сильного затухания ($\omega_0{}^2<\chi^2/2$), поэтому максимум амплитуды приходится на нулевую частоту и примерный график зависимости должен выглядеть так, как изображено на рисунке.



Характерная зависимость амплитуды колебаний катушки от частоты напряжения (11)

На частоте $f_0=30\,Гц$ ($\omega_0=188c^{-1}$) амплитуда равна

$$A=D/(\chi\omega_0)$$

$$A=1{,}74\cdot10^{-4}\,м=0{,}174\,мм \quad (12)$$

3. Звуковая мощность.

Как было сказано в условии, в связи с генерацией звуковых волн на мембрану действует сила сопротивления $F_{сопр}=-\beta v$. Это значит, что мощность $P_{зв}{}^{мгнов}=\beta vv=\beta\dot{z}^2$ идет на создание звука. Таким образом, мгновенная звуковая мощность

$$P_{зв}{}^{мгнов}=\beta v^2=\beta[-\omega A\sin(\omega t+\psi)]^2=\frac{\beta\omega^2D^2}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\chi\omega)^2}\sin^2(\omega t+\psi) \qquad (13)$$

Это мгновенная мощность, но с практической точки зрения нас интересует средняя звуковая мощность, поэтому надо усреднить мгновенную мощность по периоду. Как известно, среднее значение $\sin^2(\omega t+\psi)$ по периоду равно $1/2$. Итого,

$$P_{зв}(\omega)=\frac{\beta D^2}{2}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\chi\omega)^2}. \qquad (14)$$

Исследуем $P_{зв}(\omega)$ на максимум.

$$\frac{d}{d\omega}\left[\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\chi\omega)^2}\right]=\frac{2\omega((\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\chi\omega)^2)-\omega^2(2(\omega^2-\omega_0{}^2)2\omega+2\chi^2\omega)}{\left[(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\chi\omega)^2\right]^2}=0$$

$$\omega[\omega^4+\omega_0{}^4-2\omega^2\omega_0{}^2+\chi^2\omega^2-2\omega^4+2\omega_0{}^2\omega^2-\chi^2\omega^2]=0$$

$$\omega(\omega_0{}^4-\omega^4)=0$$

$$\omega(\omega^2-\omega_0{}^2)(\omega_0{}^2+\omega^2)=0$$

Физический смысл имеют решения $\omega_1=0$ (соответствует минимуму мощности) и $\omega=\omega_0$ (соответствует максимуму мощности). Итак, звуковая мощность максимальна на частоте

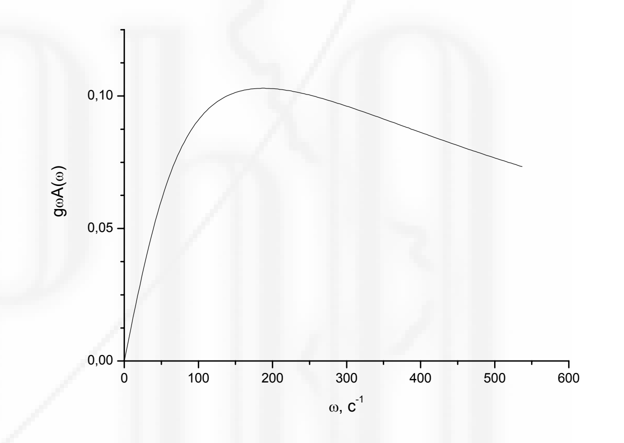
$$\omega=\omega_0=188c^{-1}, \qquad (15)$$

при этом мощность равна

$$P_{зв\max}=\frac{\beta D^2}{2\chi^2}=0.0142Bm. \qquad (16)$$

Потребляемая электрическая мощность $P_{эл}=\varepsilon(t)I(t)\cos\phi$, где ϕ - сдвиг фаз между током и напряжением. Сила тока $I=\dfrac{\varepsilon(t)+g\dot z}{R}$.

Оценим величину $g\dot z=-gA\omega\sin(\omega t+\psi)$. Пренебречь ей можно, если амплитуда $g\omega A$ будет много меньше ε_0. Как видно по графику, с ростом частоты ω амплитуда $A(\omega)$ убывает, причем при больших частотах обратно пропорционально квадрату частоты. При малых частотах ωA мало, при больших тоже мало, а в средних частотах имеет максимум. Выражение $g\omega A=\dfrac{Dg\omega}{[(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(\chi\omega)^2]^{1/2}}$ ведет себя так, как изображено на рисунке.



Зависимость $g\omega A$ от частоты

Для оценки можно воспользоваться рассчитанным в предыдущем пункте значением A на частоте $\omega_0=188c^{-1}$.

$$g\omega_0A(\omega_0)=0.103B$$

Поскольку в условии требуется не найти, а оценить величину КПД, можем пренебречь величиной $g\omega_0A(\omega_0)=0.103B$ по сравнению с $\varepsilon_0=1B$, что приведет к тому, что значение КПД получится чуть завышенным.

Тогда потребляемая мгновенная мощность $P_{эл}{}^{мгнов}=\dfrac{\varepsilon_0{}^2\cos^2(\omega t)}{R}$, а среднее значение потребляемой мощности

$$P_{эл}=\frac{\varepsilon_0{}^2}{2R}. \qquad (17)$$

Потребляемая электрическая мощность равна $P_{эл}=0{,}125Bm$.

Максимальный КПД равен

$$\eta_{\max}={P_{зв\max}}\big/{P_{эл}}=0{,}113 \qquad (18)$$

Для нахождения граничных частот рабочего диапазона надо решить уравнение

$$P_{зв}(\omega_{н,в}) = \frac{P_{зв\max}}{2} \qquad (19)$$

$$\frac{\beta D^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + (\chi\omega)^2} = \frac{1}{2}\frac{\beta D^2}{2\chi^2}$$

$$\omega^4 - (2\omega_0{}^2 + \chi^2)\omega^2 + \omega_0{}^4 = 0$$

$$\omega_{в,н} = \sqrt{(\omega_0{}^2 + \chi^2/2) \pm \chi\sqrt{\omega_0{}^2 + \chi^2/4}} \qquad (20)$$

Верхняя граничная частота равна

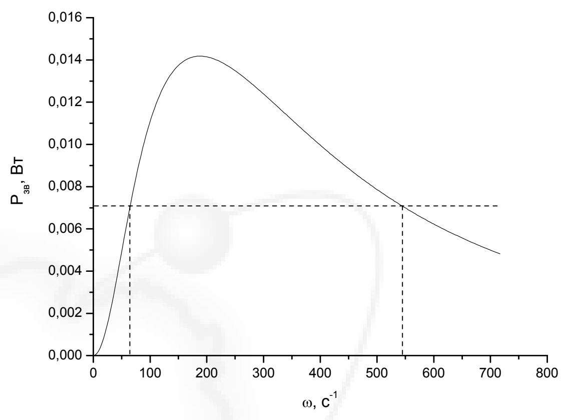
$\omega_в = 544 c^{-1}$ или $f_в = 86,6 Гц$. (21а)

Нижняя граничная частота равна

$\omega_н = 65,0 c^{-1}$ или $f_н = 10,3 Гц$. (21б)

График зависимости звуковой мощности от частоты переменного напряжения изображен на рисунке.

Как видно, исследованный нами динамик хорошо подходит для воспроизведения низких частот (басов).



Зависимость звуковой мощности от частоты (22)