9 класс.

Задание 1. «Рабочая разминка»

Для того, чтобы упростить работу со схемой оценивания, в решении числами в круглых скобках пронумерованы не только формулы, но и численные ответы и идеи (которые, кроме того, подчеркнуты).

Решение.

1.1.1 На длине параллелепипеда, в который складывают плитки, уложится $\boxed{N_A = A/a = 10}$ плиток, на ширине $\boxed{N_B = B/b = 10}$ плиток и на высоте $\boxed{N_C = C/c = 20}$ плиток. Плитки будут лежать в N_C слоев по $N_A N_B$ плиток в каждом.

1) Работа против силы тяжести при подъеме груза массой m на высоту h равна

$$\boxed{A^*_0 = mgh}. \qquad (1)$$

Для того, чтобы положить плитку в первый слой, необходимо вынуть ее из мостовой и поднять на высоту c, совершив работу mgc. Чтобы положить плитку во второй слой, ее надо поднять на высоту $2c$, т.е. совершить работу $2mgc$. Аналогично, для того, чтобы положить плитку в слой номер n, надо совершить работу $nmgc$.

Работа, совершаемая при укладке:

первого слоя $A^*_1 = mgcN_A N_B$,

второго слоя $A^*_2 = 2mgcN_A N_B$,

………………………………

n-ого слоя $A^*_n = nmgcN_A N_B$,

………………………………

Полная работа по укладке кирпичей $A^* = A^*_1 + A^*_2 + ... + A^*_{N_C} = \sum_{n=1}^{N_C} A^*_n$.

$$\boxed{A^* = mgcN_A N_B (1+2+...+N_C) = mgcN_A N_B \frac{N_C(N_C+1)}{2} = \frac{mgc}{2}\frac{A}{a}\frac{B}{b}\frac{C}{c}\left(\frac{C}{c}+1\right)} \qquad (2).$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$A = mg\frac{ABC(C+c)}{2abc} = 10 \cdot 10 \frac{2{,}0 \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}05}{2 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}05} = 105\,кДж. \qquad (3)$$

***1.1.1** (альтернативный вариант).* Минимальная работа равна изменению потенциальной энергии системы. Легко заметить, что параллелепипед состоит из целых плиток. Его полная масса равна

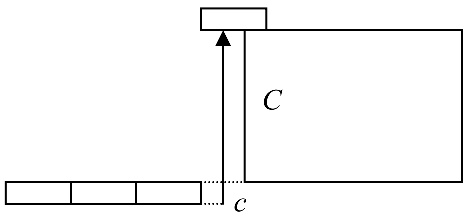
$$M = m\frac{ABC}{abc}.$$

В ходе «строительства» штабеля центр масс системы поднимается на высоту $\Delta h = \frac{C}{2} + \frac{c}{2}$,

поэтому изменение потенциальной энергии (то есть совершенная работа) равно

$$A = Mg\Delta h = mg\frac{ABC(C+c)}{2abc}.$$

1.1.2. Для того чтобы положить любую плитку в ящик, надо поднять ее над бортиком (4), поэтому каждую плитку надо поднять на высоту $C+c$ (вниз их опустит сила тяжести) и совершить работу $mg(C+c)$. Всего плиток $N_A N_B N_C$, поэтому полная работа будет равна



$$\boxed{A^* = N_A N_B N_C mg(C+c) = mg(C+c)\frac{A}{a}\frac{B}{b}\frac{C}{c}} \tag{5}$$

$$\boxed{A^* = 210000\,Дж = 210\,кДж} \tag{6}$$

1.1.3. Каждый слой пирамиды будет квадратным, поскольку на высоте пирамиды уложится $N_H = H/c = 10$ плиток и на обеих сторонах основания уложится $L/a = L/b = 10$ плиток.

На длине основания 1ого слоя уместится 10 плиток.

На длине основания 2ого слоя уместится 9 плиток.

На длине основания n-ого слоя уместится $11-n$ плиток.

В n-ом слое будет $(11-n)^2$ плиток, (7)

причем каждую из них необходимо поднять на высоту nc, тогда работа на укладку плиток n-ого слоя будет равна

$$\boxed{A^*_n = mgcn(11-n)^2} \tag{8}$$

Полная работа, которую надо затратить на укладку пирамиды, равна

$$\boxed{A^* = \sum_{n=1}^{N_H} A^*_n = \sum_{n=1}^{N_H} mgcn(11-n)^2 = mgc\sum_{n=1}^{N_H}(n^3 - 22n^2 + 121n) = mgc(\sum_{n=1}^{N_H} n^3 - 22\sum_{n=1}^{N_H} n^2 + 121\sum_{n=1}^{N_H} n)}.$$

Необходимые суммы приведены в условии задачи, поэтому

$$A^* = mgc(\frac{N_H^2(N_H+1)^2}{4} - 22\frac{N_H(N_H+1)(N_H+2)}{6} + 121\frac{N_H(N_H+1)}{2}) =$$

$$= mgc\frac{N_H(N_H+1)}{2}\left[\frac{N_H(N_H+1)}{2} - \frac{22}{3}(N_H+2) + 121\right] =$$

$$= mgc\frac{H/c\,(H/c+1)}{2}\left[\frac{H/c\,(H/c+1)}{2} - \frac{22}{3}(H/c+2) + 121\right] \tag{9}$$

$$\boxed{A^* = 24200\,Дж = 24{,}2\,кДж} \tag{10}$$

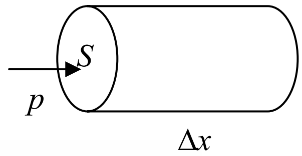
2.1. Насос может создавать давление $P = 5 \cdot 10^3\,Па$. Это означает, что он сможет поднять воду на высоту не большую, чем

$$h_{\max} = \frac{P}{\rho g}. \tag{11}$$

Поднять на большую высоту не позволит гидростатическое давление.

В случае 2.1.1 насос сможет наполнить бассейн до уровня $h_{\max}$, при этом объем закачанной воды будет равен

$$\boxed{V = ABh_{\max} = AB\frac{P}{\rho g}}. \tag{12}$$



Для того чтобы найти работу, совершенную насосом, рассмотрим небольшой промежуток времени, за который насос по шлангу закачал малый объем воды $\Delta V = S\Delta x$, где S - площадь поперечного сечения шланга. На воду при этом действует со стороны насоса сила $\boxed{F = pS}$,

а ее работа при этом равна $\boxed{\Delta A^* = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V}$.

Полная работа, которую совершит насос,

$$\boxed{A^* = P\sum \Delta V = PV = PAB\frac{P}{\rho g} = \frac{ABP^2}{\rho g}} \tag{13}$$

$$\boxed{A^* = 100000\,Дж = 100\,кДж} \tag{14}$$

Стоит отметить, что работа, совершенная насосом в 2 раза больше изменения потенциальной энергии воды

$$\Delta W = Mg\frac{h_{\max}}{2} = ABh_{\max}\rho g\frac{h_{\max}}{2} = \frac{AB\rho g P^2}{2\rho^2 g^2} = \frac{ABP^2}{2\rho g}.$$

Дело в том, что на воду в шланге действует не только сила со стороны насоса, но и сила гидростатического давления со стороны воды, уже закачанной в бассейн. Равнодействующая этих сил не равна нулю (становится равной нулю только, когда высота воды в бассейне достигнет $h_{\max}$*), поэтому вода в шланге движется с ускорением и работа насоса идет на увеличение потенциальной и кинетической энергии воды. (15)*

Вода в бассейне будет двигаться, но, в конце концов, успокоится благодаря силам вязкого трения.

2.2. В случае 2) закачка воды просто не начнется. По шлангу, переброшенному через борт бассейна, надо поднять воду как минимум на высоту $C = 1м$, а насос может поднять воду не выше, чем на $h_{\max} = 0{,}5м$. (12)

Соответственно, никакой работы насос совершить не сможет, поэтому

$$\boxed{A^* = 0\,Дж} \tag{16}$$

1.3 Чтобы смести песок в пирамиду, необходимо совершить не только работу против силы тяжести A^*_m, но ещё и работу A^*_{mp} против силы трения, действующей на песчинки при сметании.

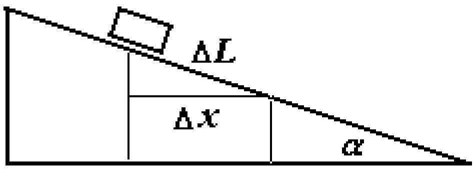
Работа против силы тяжести, идущая на увеличение потенциальной энергии песчинок, равна

$$\boxed{A^*_m = Mgh_c}, \tag{18}$$

где M - масса пирамиды, h_c - высота центра масс пирамиды от основания.

$$\boxed{A^*_m = \rho V g h_c = \rho \frac{1}{3} SHg \frac{H}{4} = \frac{\rho g L^2 H^2}{12}}. \tag{19}$$

Заметим, что работа силы трения при движении по наклонной плоскости полностью определяется горизонтальным смещением. Действительно, пусть тело находится на наклонной плоскости. Тогда сила трения, действующая на него равна



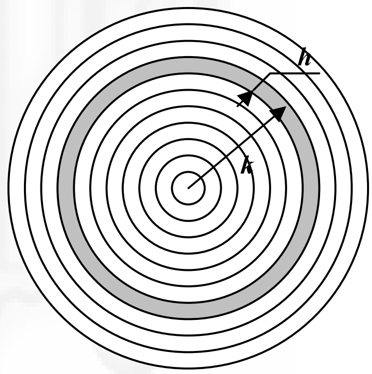
$$F = \mu mg\cos\alpha .$$

Тогда при смещении тела на расстояние ΔL вдоль наклонной плоскости будет совершена работа

$$A = F\Delta L = \mu mg\Delta L\cos\alpha = \mu mg\Delta x \tag{20}$$

и не зависит от угла наклона. Обобщая данный результат, следует заключить, что при движении по поверхности любого профиля работа силы трения (или равная ей работа внешней силы по преодолению трения) полностью определяется горизонтальным смещением по формуле (20), если, конечно, не учитывать ускорения, могущие возникать при движении тела.

Найдем работу, совершаемую против силы трения при сметании песка. Очевидно, что для сметания песчинок, находящихся на разном расстоянии от центра круга, необходимо совершить разную работу. Разобьем круг на большое количество N_R колец толщиной $\boxed{h = R/N_R}$. (21)



Кольцо номер k, считая от центра, будет иметь радиус $\boxed{r_k = kh}$ и площадь $\boxed{S_k = 2\pi r_k h = 2\pi h^2 k}$.

Масса всего песка внутри круга равна массе песка в пирамиде

$$\boxed{M = \rho V = \rho \frac{SH}{3} = \frac{\rho L^2 H}{3}},$$

причем этот песок находится в круге площадью $S = \pi R^2$.

В кольце номер k находится песок массой

$$\boxed{m_k = M\frac{S_k}{S} = \frac{\rho L^2 H}{3}\frac{2\pi h^2 k}{\pi R^2} = \frac{2\rho L^2 H h^2}{3R^2}k} \tag{22}$$

При сметании песка из кольца k на него действует сила трения $F_k = \mu g m_k$, а минимальная работа против нее (если сметать по радиусу) работа равна

$$\boxed{A^*_k = \mu g m_k r_k = \mu g \frac{2\rho L^2 H h^2}{3R^2} khk = \frac{2\mu g \rho L^2 H h^3}{3R^2} k^2} \tag{23}$$

Отметим, что радиус площадки значительно превышает длину основания кучи, поэтому можно считать, что все песчинки сметаются в центр круга.
Полная работа по преодолению сил трения при сметанию песка к центру равна

$$\boxed{A^*_{тр} = \sum_{k=1}^{N_R} A^*_k = \sum_{k=1}^{N_R} \frac{2\mu g\rho L^2 H h^3}{3R^2} k^2 = \frac{2\mu g\rho L^2 H h^3}{3R^2} \sum_{k=1}^{N_R} k^2 = \frac{2\mu g\rho L^2 H h^3}{3R^2} \frac{N_R (N_R+1)(N_R+2)}{6}}. \quad (24)$$

Так как мы разбили круг на очень большое количество колец $N_R >> 1$, то единицей и двойкой по сравнению с N_R можно пренебречь.

Кроме того, надо вспомнить, что $h = R/N_R$, тогда

$$\boxed{A^*_{тр} = \frac{2\mu g\rho L^2 H (h^3}{3R^2} \frac{N^3_R)}{6} = \frac{2\mu g\rho L^2 H R^3}{18R^2} = \frac{\mu g\rho L^2 H R}{9}} \quad (25)$$

Полная работа по сметанию песка в пирамиду равна

$$\boxed{A^* = \frac{\rho g L^2 H^2}{12} + \frac{\mu g\rho L^2 H R}{9} = \frac{\rho g L^2 H}{3}\left(\frac{H}{4} + \frac{\mu R}{3}\right)}$$

$$\boxed{A^* = 820000 Дж = 820 кДж} \quad (26)$$

Задание 2. «Водная феерия»

2.1 При открывании крышки давление упадет до нормального атмосферного, при этом вода окажется перегретой – начнется вскипание, которое будет продолжаться до тех пор, ее температура не понизится до температуры кипения при нормальном атмосферном давлении, то есть до $t_1 = 100°C$. При это теплота, выделившаяся при остывании воды пойдет на испарение ее части Δm. Уравнение теплового баланса в этом случае примет вид

$$L\Delta m = c_1 m(t_0 - t_1), \quad (1)$$

из которого легко определить долю выкипевшей воды

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_0 - t_1)}{L} = \frac{4{,}2\cdot 10^3 \cdot (120-100)}{2{,}2\cdot 10^6} \approx 3{,}8\cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

Иными словами, выкипит около 4% воды.

2.2 При кристаллизации выделяется теплота, которая расходуется на нагревание оставшейся воды. Процесс кристаллизации будет продолжаться до тех пор, пока температура воды не станет равной $t_1 = 0°C$. Уравнение теплового баланса в данном случае принимает вид

$$\lambda\Delta m = c_1 m(t_1 - t_0). \quad (1)$$

Откуда находим

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_1 - t_0)}{\lambda} = \frac{4{,}2\cdot 10^3 \cdot (0-(-5))}{330\cdot 10^3} \approx 6{,}3\cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

Примечание: Малость доли воды, претерпевающей фазовый переход, позволяет пренебречь изменением теплоемкости смеси при фазовых превращениях.