Отметим, что радиус площадки значительно превышает длину основания кучи, поэтому можно считать, что все песчинки сметаются в центр круга.
Полная работа по преодолению сил трения при сметанию песка к центру равна

$$\boxed{A^*_{тр} = \sum_{k=1}^{N_R} A^*_k = \sum_{k=1}^{N_R} \frac{2\mu g\rho L^2 H h^3}{3R^2} k^2 = \frac{2\mu g\rho L^2 H h^3}{3R^2} \sum_{k=1}^{N_R} k^2 = \frac{2\mu g\rho L^2 H h^3}{3R^2} \frac{N_R (N_R+1)(N_R+2)}{6}}. \quad (24)$$

Так как мы разбили круг на очень большое количество колец $N_R >> 1$, то единицей и двойкой по сравнению с N_R можно пренебречь.

Кроме того, надо вспомнить, что $h = R/N_R$, тогда

$$\boxed{A^*_{тр} = \frac{2\mu g\rho L^2 H (h^3}{3R^2} \frac{N^3_R)}{6} = \frac{2\mu g\rho L^2 H R^3}{18R^2} = \frac{\mu g\rho L^2 HR}{9}} \quad (25)$$

Полная работа по сметанию песка в пирамиду равна

$$\boxed{A^* = \frac{\rho g L^2 H^2}{12} + \frac{\mu g\rho L^2 HR}{9} = \frac{\rho g L^2 H}{3}\left(\frac{H}{4} + \frac{\mu R}{3}\right)}$$

$$\boxed{A^* = 820000 Дж = 820 кДж} \quad (26)$$

Задание 2. «Водная феерия»

2.1 При открывании крышки давление упадет до нормального атмосферного, при этом вода окажется перегретой – начнется вскипание, которое будет продолжаться до тех пор, ее температура не понизится до температуры кипения при нормальном атмосферном давлении, то есть до $t_1 = 100°C$. При это теплота, выделившаяся при остывании воды пойдет на испарение ее части Δm. Уравнение теплового баланса в этом случае примет вид

$$L\Delta m = c_1 m(t_0 - t_1), \quad (1)$$

из которого легко определить долю выкипевшей воды

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_0 - t_1)}{L} = \frac{4{,}2\cdot 10^3 \cdot (120-100)}{2{,}2\cdot 10^6} \approx 3{,}8\cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

Иными словами, выкипит около 4% воды.

2.2 При кристаллизации выделяется теплота, которая расходуется на нагревание оставшейся воды. Процесс кристаллизации будет продолжаться до тех пор, пока температура воды не станет равной $t_1 = 0°C$. Уравнение теплового баланса в данном случае принимает вид

$$\lambda\Delta m = c_1 m(t_1 - t_0). \quad (1)$$

Откуда находим

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_1(t_1 - t_0)}{\lambda} = \frac{4{,}2\cdot 10^3 \cdot (0-(-5))}{330\cdot 10^3} \approx 6{,}3\cdot 10^{-2}. \quad (2)$$

<u>Примечание:</u> Малость доли воды, претерпевающей фазовый переход, позволяет пренебречь изменением теплоемкости смеси при фазовых превращениях.

2.3 В зависимости от количества впущенного пара могут реализовываться различные конечные состояния воды в сосуде: только лед, лед и жидкость, жидкость, жидкость и пар. Последовательно рассмотрим возможные процессы и конечные равновесные состояния при увеличении количества впущенного пара.

1. *Пар сконденсировался, образовавшаяся вода остыла до температуры замерзания и частично замерзла – при этом температура льда не достигла температуры плавления.*

В этом случае уравнение теплового баланса имеет вид

$$Lm + c_1 m(t_1 - t_{пл.}) + \lambda m + c_0 m(t_{пл.} - t_x) = c_0 m_0 (t_x - t_0), \qquad (1)$$

здесь и далее: m - масса впущенного пара, t_x - температура, установившаяся в сосуде после установления теплового равновесия, $t_{пл.} = 0{,}0°C$ - температура плавления льда.

Из уравнения (1) находим требуемую зависимость:

$$t_x = \frac{Lm + c_1 m(t_1 - t_{пл.}) + \lambda m + c_0 m t_{пл.} + c_0 m_0 t_0}{c_0 m + c_0 m_0}. \qquad (2)$$

Подставляя численные значения характеристик воды (удобно теплоту измерять в кДж, а массы в граммах), получим функцию

$$t_x = \frac{Lm + c_1 m(t_1 - t_{пл.}) + \lambda m + c_0 m t_{пл.} + c_0 m_0 t_0}{c_0 m + c_0 m_0} = \frac{(2200 + 4{,}2 \cdot 100 + 330)m + 2{,}1 \cdot 300 \cdot (-10)}{2{,}1 \cdot (300 + m)} = \qquad (3)$$

$$= \frac{2950m - 6300}{6300 + 2{,}1m}$$

Температура льда достигнет нуля, при массе впущенного пара равной $m_1 = \dfrac{6300}{2950} \approx 2{,}1\,г$.

Так как эта масса мала, то зависимость (3) является примерно линейной. Этот участок на графике обозначен «0-1».

2. *Количество пара превысило найденной значение $m_1 \approx 2{,}1\,г$. При этом лед начал плавиться, но пара «не хватает», чтобы расплавить весь лед*. В этом случае в сосуде в состоянии равновесия окажется смесь льда и воды, находящаяся при температуре $t_{пл.} = 0{,}0°C$. Найдем массу пара m_2, при которой количество теплоты, выделившейся при конденсации пара и остывании образовавшейся воды, будет достаточно, чтобы нагреть лед до температуры плавления и полностью его расплавить. Из уравнения теплового баланса

$$Lm_2 + c_1 m_2 (t_1 - t_{пл.}) = c_0 m_0 (t_{пл.} - t_0) + \lambda m_0 \qquad (4)$$

находим

$$m_2 = \frac{c_0 m_0 (t_{пл.} - t_0) + \lambda m_0}{L + c_1 (t_1 - t_{пл.})} = \frac{2{,}1 \cdot 300 \cdot 10 + 330 \cdot 300}{2200 + 4{,}2 \cdot 100} \approx 40\,г. \qquad (5)$$

Таким образом, при массе пара от $m_1 \approx 2{,}1\,г$ до $m_2 \approx 40\,г$ температура установившаяся в сосуде будет равна $t_{пл.} = 0{,}0°C$ (участок «1-2» на графике).

3. *Весь лед расплавился, образовавшаяся при этом вода стала нагреваться*. В этом случае тепловой баланс имеет вид: теплота, выделившаяся при конденсации пара и остывании образовавшейся воды, расходуется на нагревание льда, его плавление и нагревание талой воды до равновесной температуры t_x, или на языке уравнения:

$$Lm + c_1 m(t_1 - t_x) = c_0 m_0 (t_{пл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_x - t_{пл.}). \qquad (6)$$

Из этого уравнения определяем

$$t_x = \frac{Lm + c_1 m t_1 - c_0 m_0 (t_{пл.} - t_0) - \lambda m_0}{c_1 m + c_1 m_0} =$$
$$= \frac{2200m + 4{,}2 \cdot 100m - 2{,}1 \cdot 300 \cdot 10 - 330 \cdot 300}{4{,}2m + 4{,}2 \cdot 300} = \frac{2620m - 105300}{4{,}2m + 1260} \quad (7)$$

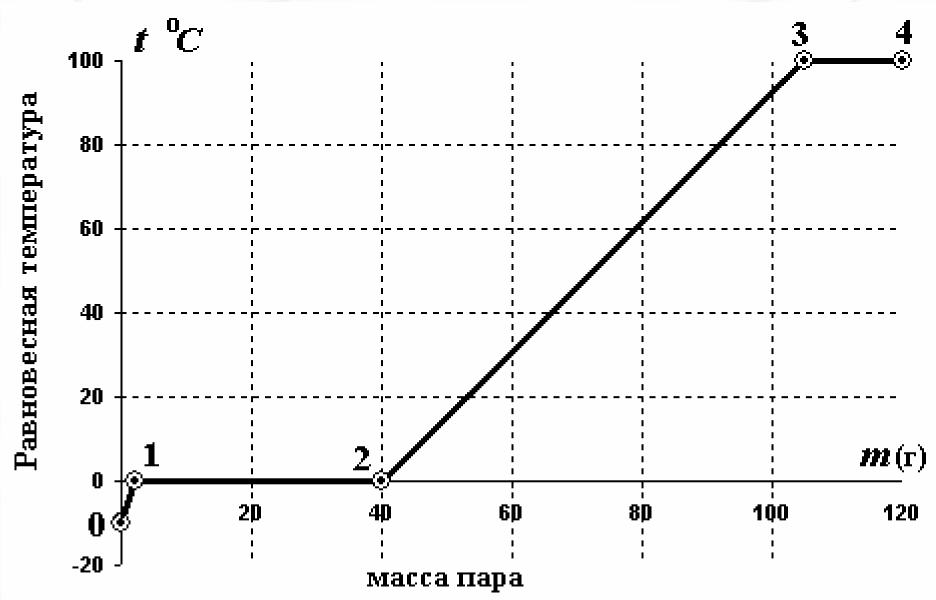
Это участок на графике обозначен «2-3». Конечная температура достигнет температуры конденсации $t_1 = 100°C$, если масса впускаемого пара превысит значение m_3, которое также можно определить из уравнения (6), в котором следует положить $t_x = t_1$:

$$Lm_3 = c_0 m_0 (t_{пл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{пл.}). \quad (8)$$

Или

$$Lm_3 = c_0 m_0 (t_{пл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{пл.})$$
$$m_3 = \frac{c_0 m_0 (t_{пл.} - t_0) + \lambda m_0 + c_1 m_0 (t_1 - t_{пл.})}{L} = \quad (9)$$
$$= \frac{2{,}1 \cdot 300 \cdot 10 + 330 \cdot 300 + 4{,}2 \cdot 300 \cdot 100}{2200} \approx 105 г$$

При дальнейшем увеличении массы пара конечная температура не превысит $t_1 = 100°C$. Требуемый график показан на рисунке.



Отметим, что наклонные участки, строго говоря, не прямолинейны. Однако эти отклонения незначительны.

Задание 3. «Опыт Араго»

1. Необходимо, чтобы лучи отражённые от зеркальца $З1$, попали на зеркало $З2$. Это возможно при

$$\frac{90^\circ - \theta}{2} < \varphi < 45^\circ \quad (1),$$

$$40° < \varphi < 45^\circ \quad (2),$$

и, т.к. зеркальце двухстороннее,

$$\frac{90^\circ - \theta}{2} + 180^\circ < \varphi < 45^\circ + 180^\circ \quad (3),$$

$$220° < \varphi < 225^\circ \quad (4).$$