$$h = 56\ см.$$

Заметим, что рассмотренный принцип действия гидроподушки («воздушной» подушки) широко используется при создании современной техники, способной передвигаться как по суше, так и по воде.

Задание 2 «Торможение спутника»

1. При движении спутника, на него действует лишь сила притяжения со стороны Земли (сопротивление пока не учитываем). Она же является центростремительной силой.

$$G\frac{Mm}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0} \qquad (1).$$

Отсюда получаем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \qquad (2).$$

Период обращения:

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_0^{3/2} \qquad (3).$$

2. Полная механическая энергия спутника есть сумма его потенциальной и кинетической энергий:

$$E_0 = -G\frac{Mm}{R_0} + \frac{mv_0^2}{2} = -G\frac{Mm}{2R_0} = -\frac{mv_0^2}{2} \qquad (4).$$

Заметим, что полная энергия является отрицательной величиной и по модулю равна кинетической энергии.

3. Т.к. радиус орбиты изменяется несущественно, то можно считать, что на протяжении всего витка на него действует одна и та же постоянная по модулю сила сопротивления $F_C = C\rho_0 S v_0^2$, т.е. плотность воздуха и скорость в этом выражении считаем постоянными. Эта сила будет совершать отрицательную работу $A_C = -F_C \cdot 2\pi R_0$, что приведёт к уменьшению полной энергии спутника. Для вычисления относительного изменения скорости, воспользуемся выражением полной энергии спутника через его скорость. Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$-\frac{mv_0^2}{2} - C\rho_0 S v_0^2 \cdot 2\pi R_0 = -\frac{m(v_0 + \Delta v)^2}{2} \qquad (5).$$

Сразу же отметим, что скорость должна увеличиваться. Преобразуем выражения, стоящие в правой части равенства.

$$(v_0 + \Delta v)^2 = v_0^2\left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 = v_0^2\left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0} + \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right) \approx v_0^2\left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0}\right) \qquad (6).$$

В последнем преобразовании было учтено, что величина $\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2$ очень маленькая, поэтому её можно не учитывать.

Используя такое упрощение и преобразуя уравнение (5), получим:

$$\frac{\Delta v}{v_0} = 2\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \qquad (7).$$

Для определения относительного изменения радиуса орбиты, поступим следующим образом. Из (2) следует, что:

$$v_0^2 R_0 = GM = const \qquad (8).$$

Другими словами, произведения квадрата скорости на радиус орбиты остаётся постоянной величиной. Значит:

$$(v_0 + \Delta v)^2 \cdot (R_0 - \Delta R) = v_0^2 R_0 \quad (9).$$

Совершив, преобразование (6), получим:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 2\frac{\Delta v}{v_0} = 4\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \quad (10).$$

Заметим, что в решении этого пункта присутствует существенное упрощение. С одной стороны мы считаем силу постоянной, а, т.к. в выражение для силы входит квадрат скорости, то его мы фактически тоже считаем постоянным. С другой стороны мы ищем изменение этой самой скорости. На самом деле, с изменением скорости изменяется и сила сопротивления, и точное решение будет несколько отличаться от полученного нами. Однако для малых относительных изменений скорости это различие будет несущественным и такой метод решения вполне применим.

4. Выражение для тангенциального ускорения легко получить, разделив изменение скорости спутника на величину промежутка времени, за который это изменение произошло, т.е. на продолжительность одного «витка».

$$a_T = \Delta v \big/ (2\pi R_0 / v_0) = \frac{C\rho_0 S v_0^2}{m} = \frac{F_C}{m} \quad (11).$$

Такой вот получается парадокс. Вроде как сила сопротивления, а приводит к ускорению спутника.

5. Скорость снижения спутника находится аналогично:

$$v_{n0} = \Delta R \big/ (2\pi R_0 / v_0) = \frac{2R_0 C\rho_0 S v_0}{m} \quad (12).$$

Используя выражение (2), получим:

$$v_{n0} = \frac{2C\rho_0 S\sqrt{GM}}{m}\sqrt{R_0} \quad (13).$$

Если плотность будет убывать обратно пропорционально корню квадратному от расстояния до центра Земли, то скорость v_{n0} не будет изменяться. Поэтому

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (14).$$

6. Рассмотрим подробнее выражение (11). Выражая плотность, получим:

$$\rho = \frac{m}{CS}\frac{1}{v^2}a_T = \frac{m}{CS}\frac{1}{v^2}\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (15).$$

Таким образом, чтобы найти плотность, надо не знать скорость и ускорение спутника. Кроме того, понадобится также определять высоту, на которой находится спутник в данный момент времени:

$$h = R - R_0 = \frac{GM}{v^2} - R_0 \quad (16).$$

Подставим известные численные значения постоянных и получим:

$$\rho = 100\frac{1}{v^2}\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (17)$$

$$h = \frac{4{,}00 \cdot 10^{14}}{v^2} - 6{,}4 \cdot 10^6 \quad (18).$$

Для вычисления $\rho(h)$ необходимо на приведённом графике взять несколько точек, по значению скорости вычислить высоту полёта спутника, а проведя касательные в этих точках, вычислить ускорения, что позволит определить плотность атмосферы. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

$v, м/с$	$h, км$	$\Delta v/\Delta t, м/с^2$	$\rho, кг/м^3$	$\ln(\rho)$
7780	208	$6{,}6\cdot10^{-6}$	$1{,}1\cdot10^{-11}$	-25
7790	192	$5{,}6\cdot10^{-5}$	$9{,}5\cdot10^{-11}$	-23
7800	175	$4{,}3\cdot10^{-4}$	$7{,}0\cdot10^{-10}$	-21
7810	158	$4\cdot10^{-3}$	$7\cdot10^{-9}$	-19

Точно провести касательную – сложная задача, поэтому ускорение приведено с двумя (а в последнем случае – с одной) значащими цифрами.

Видим, что в пятидесятикилометровом интервале высоты плотность изменяется почти на три порядка. В таблице также вычислен натуральный логарифм от плотности, что необходимо для определения β. На рисунке 1 приведён график $\ln(\rho) = f(h)$. Можно с достаточной долей уверенности сказать, что плотность действительно будет убывать по экспоненциальному закону. Из этого графика можно получить величину постоянной β:

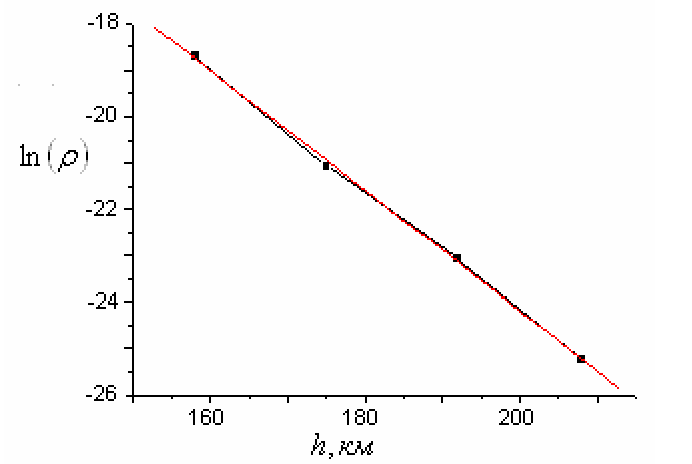


Рис. 1

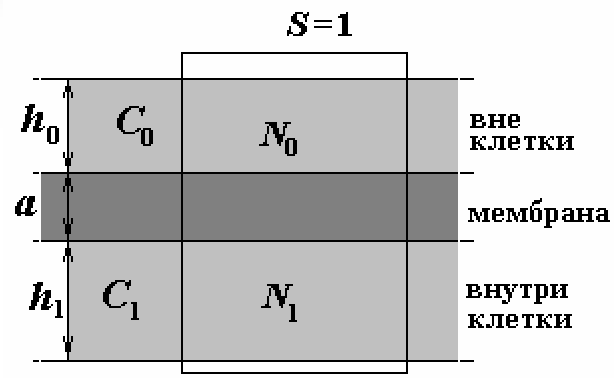
$$\beta = (1{,}3 \pm 0{,}2)\cdot 10^{-1}\, км^{-1} = (1{,}3 \pm 0{,}2)\cdot 10^{-4}\, м^{-1} \qquad (19).$$

Задание 3. «Нервное возбуждение»

1. Диффузия.

Выделим параллелепипед с единичной площадью основания, боковые стороны которого перпендикулярны плоскости мембраны. Изменение чисел части в вне клетки и внутри нее (в пределах выделенного параллелепипеда) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_0}{\Delta t} &= -g(C_0 - C_1) \\ \frac{\Delta N_1}{\Delta t} &= -g(C_1 - C_0) \end{aligned}. \qquad (1)$$



Учитывая связь меду числом частиц и соответствующей концентрацией $N_{0,1} = C_{0,1}h_{0,1}$, перепишем уравнения (1) в виде