Задание 3. «Охлаждение светом»

1. Пусть скорость атома после поглощения равна v_1. Запишем законы сохранения энергии и импульса в неподвижной системе координат:

$$\frac{mv_0^2}{2} + E_\Phi = \frac{mv_1^2}{2} + E_1 \qquad (1),$$

$$mv_0 - \frac{E_\Phi}{c} = mv_1 \qquad (2).$$

Очевидно, что скорость изменится незначительно, поэтому справедливо следующее преобразование:

$$v_0^2 - v_1^2 = (v_0 + v_1)\cdot(v_0 - v_1) = 2v_0(v_0 - v_1) \qquad (3).$$

Приведём уравнения (1) и (2) к следующему виду:

$$mv_0(v_0 - v_1) = E_1 - E_\Phi \qquad (4),$$

$$mc(v_0 - v_1) = E_\Phi \qquad (5).$$

Разделив (4) на (5), получим:

$$\frac{v_0}{c} = \frac{E_1}{E_\Phi} - 1 \qquad (6).$$

Тогда:

$$E_\Phi = \frac{E_1}{1 + \frac{v_0}{c}} = E_1\left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \qquad (7),$$

$$\text{т.к. } \frac{v_0}{c} << 1 \qquad (8).$$

Результат (7) можно было получить сразу, если помнить про эффект Доплера. Т.е. при движении фотонов навстречу атомов, их энергия может быть несколько меньше, энергии резонансного поглощения атомов.

2. Т.к. энергия фотона отличается от E_1 на малую величину, то в закон сохранения импульса можно вместо E_Φ подставить E_1 и получить значение Δv:

$$\Delta v = \frac{E_1}{mc} \qquad (9),$$

где

$$m = \frac{m_{Na}}{N_A} = 3{,}8 \cdot 10^{-26}\, кг \qquad (10).$$

Численное значение Δv:

$$\Delta v = 0{,}029\, м/с \approx 3\, см/с \qquad (11).$$

Полученное значение Δv соответствует потери скорости в процессе поглощения. За поглощением последует излучение. Изменение скорости при излучении будет таким же. Однако при излучении фотон может вылететь в любом направлении и в среднем скорость вдоль Ox не изменится.

В этом, собственно, и заключается принцип охлаждения.

3. Максимальное отклонение от направления движения, будет наблюдаться при излучении фотона в перпендикулярном направлении. Тогда отклонение от первоначального направления:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{v_0} \approx 6 \cdot 10^{-5}\, рад \qquad (12).$$

Видим, что отклонение незначительно, поэтому может произойти много тысяч актов поглощения и испускания, прежде чем атом покинет пучок.

4. Для определения промежутка скоростей, в котором атомы могут поглощать фотоны с энергией $E_{\Phi} = E_1\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$, запишем следующее выражение:

$$\left(E_1 + \frac{\Delta E}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{(v_0 + \Delta v_0)}{c}\right) = E_1\left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \qquad (13).$$

Преобразуя (13), при этом, отбрасывая очень маленькие величины (такие, как $\frac{\Delta E}{2}\frac{v_0}{c}$ и, тем более, $\frac{\Delta E}{2}\frac{\Delta v_0}{c}$), получим:

$$\Delta v_0 = c\frac{\Delta E}{2E_1} \approx 3\,{}^{м}\!/\!_{c} \qquad (14).$$

Таким образом, в процессе охлаждения задействованы атомы, скорости которых лежат в довольно узком интервале. Приблизительно после 200 актов охлаждения, этот диапазон полностью опустеет. Необходимо слегка увеличивать частоту лазера, чтобы захватить также атомы с более низкими скоростями.

5. Интенсивность пучка достаточно высокая. Поэтому можно считать, что как только атом излучил фотон, он тут же поглотит следующий. Время жизни в возбуждённом состоянии находим и соотношения неопределённости:

$$\tau \approx \frac{h}{\Delta E} \approx 10^{-7}\,c \qquad (15).$$

Для охлаждения самых «горячих» атомов ($v_{\max} = 1000\,{}^{м}\!/\!_{c}$) потребуется

$$N = \frac{1000\,{}^{м}\!/\!_{c}}{0.03\,{}^{м}\!/\!_{c}} \approx 3000 \qquad (16)$$

циклов поглощение-излучение. Т.е. для полного охлаждения понадобиться время

$$T = N\tau \approx 3\cdot 10^{-4}\,c \qquad (17).$$

Таким образом, охлаждение светом – довольно быстрый процесс, длительность которого не более одной миллисекунды.

После каждого акта торможения, скорость в направлении Ox уменьшается на $3\,{}^{см}\!/\!_{c}$ за время $10^{-7}\,c$, т.е. можно сказать, что атомы двигаются с ускорением

$$a = \frac{\Delta v}{\tau} \approx 3\cdot 10^{5}\,{}^{м}\!/\!_{c^2} \qquad (18).$$

Тогда путь, который пройдут «горячие» будет равен

$$S = \frac{v_0^2}{2a} \approx 2м \qquad (19).$$

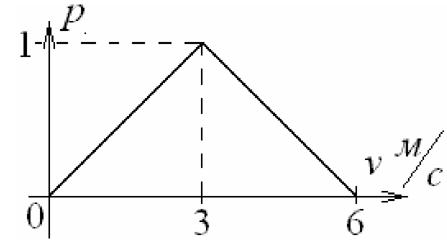

Рис. 1

6. При такой энергии фотонов, в процессе поглощения могут участвовать только атомы, скорости которых лежат в интервале $(0;2\Delta v_0)$ или $\left(0\,{}^{м}\!/\!_{c};6\,{}^{м}\!/\!_{c}\right)$. Причём при скорости $v = \Delta v_0 = c\frac{\Delta E}{2E_1} \approx 3\,{}^{м}\!/\!_{c}$ атомы поглощают фотоны, с энергией, соответствующей переходу в центр возбуждённого состояния. В условии сказано, что в этом случае поглощение происходит практически со стопроцентной вероятностью. Для оценки, будем считать, что эта вероятность линейно уменьшается до нуля, для скорости 0 и $6\,{}^{м}\!/\!_{c}$ (см. рис.1). Для нас больший

интерес представляет интервал до $3\,{}^{м}\!/_{c}$, на котором зависимость вероятности поглощения от скорости атома задаётся выражением:

$$p(v) = \xi \cdot v \tag{20}$$

Необходимо уяснить, в чём принципиальная разница между процессами упругого и неупругого (поглощение) рассеяния. При поглощении, атом в среднем уменьшает свою скорость на величину $\Delta v = \frac{E_1}{mc}$, т.е. кинетическая энергия изменяется на величину

$$\Delta E_{-} = mv\Delta v = E_1 \frac{v}{c} \tag{21}$$

Разберёмся, что происходит при упругом столкновении атома и фотона. При этом фотон произвольно изменяет направление своего движения и сообщает атому определённый импульс в произвольном направлении. Упруго рассеянный фотон разогревает атом. Максимальное изменение импульса атома происходит при лобовом соударении ($2\frac{E_\phi}{c}$). Можно считать, что в среднем атом получает импульс равный $\frac{E_\Phi}{c}$. Причём направление этого импульса случайно, т.к. фотоны летят со всех сторон, поэтому среднее изменение импульса равно нулю. Однако увеличение кинетической энергии пропорционально среднему изменению квадрата импульса:

$$\Delta E_{+} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \tag{22}$$

Среднее значение $(\Delta p)^2$ не равно нулю. Для нашей оценки можно считать, что:

$$< \Delta p >^2 = N \frac{E_\Phi^2}{c^2} \tag{23}$$

Теперь надо определиться, что понимать под N. На самом деле, это не только количество фотонов упруго рассеянных на атоме. Вспомним, что после поглощения, атом должен испустить фотон, а излучение также происходит в произвольном направлении. Т.е. N – это суммарное количество фотонов, попавших на атом за некоторый промежуток времени.

Итак, пусть за некоторый промежуток времени с атомом взаимодействует N фотонов. Все они приводят к среднему увеличению кинетической энергии на величину (23). Однако некоторая их часть приводит также и к охлаждению на величину (21). Число таких «охладителей» пропорционально вероятности процесса поглощения, т.е. пропорционально скорости атома:

$$N_{-} = N \cdot p(v) = N\xi v \tag{24}$$

Через некоторый промежуток времени в ловушке установится равновесие, т.е. атомы будут двигаться с такой скоростью, что будут поглощать фотонов ровно столько, чтобы скомпенсировать разогрев, вызванный случайными процессами рассеяния ($\Delta E_{-} = \Delta E_{+}$). Т.е.

$$N\xi v \cdot E_1 \frac{v}{c} = N \frac{E_\Phi^2}{2mc^2} \tag{25}$$

Из (25), считая, что $E_1 \approx E_\Phi$ получим:

$$mv^2 = \frac{1}{\xi}\frac{E_1}{2c} \tag{26}$$

Величину ξ мы вводили, как коэффициент пропорциональности между p и v.

$$\xi = \frac{1}{\Delta \nu_0} = \frac{2E_1}{c\Delta E} \qquad (27).$$

Подставляя это значение в (26), получим:

$$mv^2 = \frac{\Delta E}{4} \qquad (28).$$

Известна связь между кинетической энергией атомов и их температурой:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT \qquad (29).$$

В итоге:

$$T = \frac{1}{k}\frac{\Delta E}{12} \approx 0,1\frac{\Delta E}{k} \approx 5 \cdot 10^{-5}\,K \qquad (30).$$