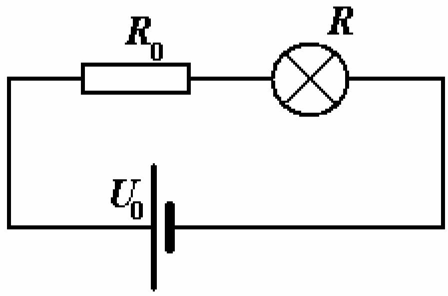
Решения задач.

9 класс.

Задание 1. «Разминка»

1.1 Лампочка.



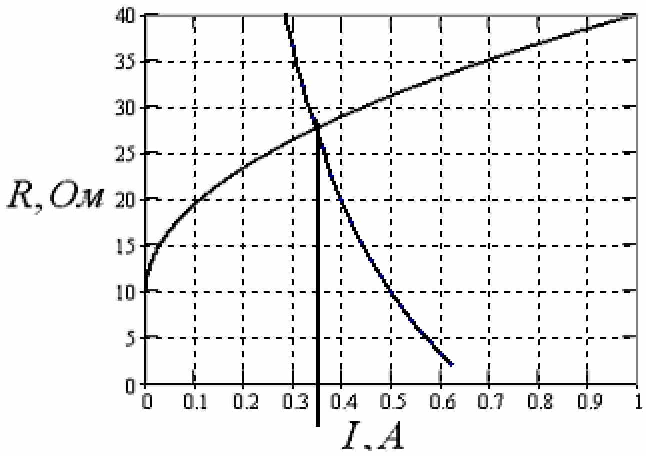
Решение данной задачи фактически сводится к решению двух уравнений, одно из которых задано графически в виде зависимости сопротивления лампочки от силы протекающего тока. Второе уравнение следует из закона Ома

$$I(R_0 + R) = U_0, \qquad (1)$$

где $U_0 = 20B$ - напряжение источника, $R_0 = 30\,Ом$ - сопротивление, последовательно включенного резистора. Из уравнения (1) выразим

$$R = \frac{U_0}{I} - R_0 \qquad (2)$$

и построим график этой функции (прямо на представленном графике). Точка пересечения двух графиков и будет решением. По графику находим, что значение силы тока в цепи приблизительно равно $I = 0{,}35A$.



Решение также легко получить методом простой итерации. Берём на вскидку некоторое значение тока в цепи, из графика находим соответствующее значение $R_Л$, подставляем его в формулу (3) и вычисляем новое значение тока.

$$I_{n+1} = \frac{U}{R + R_Л(I_n)} \qquad (3).$$

Результаты вычислений для $I_0 = 0{,}5A$ приведены в таблице

n	I, A	$R, Ом$
0	0,5	32
1	0,32	26
2	0,36	27
3	0,35	27

Таким образом, ток в цепи равен: $\boxed{I = 0{,}35A}$

1.2 «Виброход»

При скольжении бруска по ленте транспортера его ускорение определяется из уравнения второго закона Ньютона

$$ma = \mu mg \quad \Rightarrow \quad a = \mu g\,. \qquad (1)$$

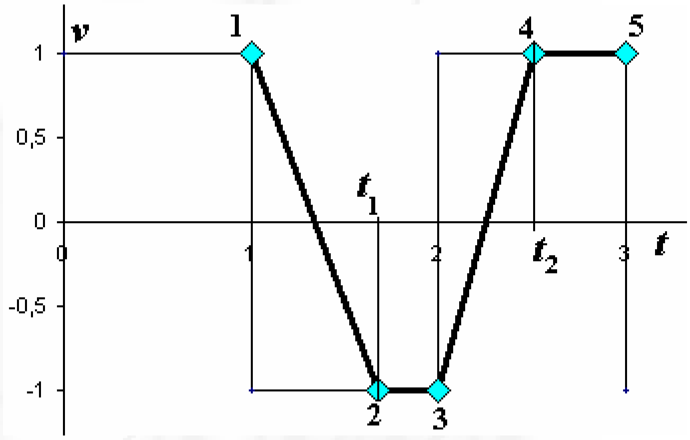
Численные значения этих ускорений

$$a_1 = \mu_1 g = 0{,}30 \cdot 9{,}81 \approx 2{,}94 \frac{м}{с^2},$$
$$a_2 = \mu_2 g = 0{,}40 \cdot 9{,}81 \approx 3{,}92 \frac{м}{с^2} \qquad (2)$$

таковы, что за одну секунду брусок успевает изменить свою скорость и достичь «новой» скорости ленты.

Рассмотрим подробнее периодический процесс движения бруска.

Итак, пусть брусок движется вместе с лентой вправо (точка 1 на графике). В этом момент времени скорость ленты изменяется на противоположную, однако брусок некоторое время продолжает по инерции двигаться в прежнем направлении, затем направление его движения изменяется, наконец, его скорость сравнивается со скоростью ленты (т. 2), после чего он движется, оставаясь неподвижным относительно ленты, до тех пор, пока скорость ленты не изменится на противоположную (т.3).



Время изменения скорости бруска (время его ускоренного движения) легко найти

$$t_1 = \frac{2V}{\mu_1 g}\,. \qquad (3)$$

Очевидно, что среднее смещение бруска за это время равно нулю. Смещение бруска за оставшейся промежуток времени (до изменения направления скорости ленты будет равно

$$\Delta x_1 = -V(\tau - t_1) = -V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_1 g}\right). \qquad (4)$$

Аналогичные рассуждения для движения ленты в противоположном направлении, приводят к аналогичной формуле, определяющей смещение бруска

$$\Delta x_2 = V(\tau - t_2) = V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_2 g}\right). \qquad (5)$$

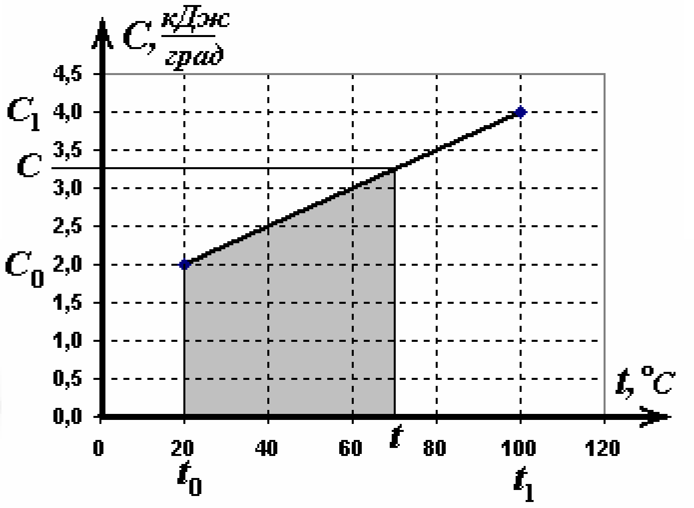
Таким образом, суммарное смещение бруска за время 2τ будет равно

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_1 g}\right) + V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_2 g}\right) = \frac{2V^2}{g}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right), \qquad (6)$$

следовательно, средняя скорость бруска равна

$$\boxed{V_{ср.} = \frac{\Delta x}{2\tau} = \frac{V^2}{g\tau}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = \frac{1{,}0^2}{9{,}81 \cdot 1{,}0}\left(\frac{1}{0{,}30} - \frac{1}{0{,}40}\right) \approx 0{,}085 \frac{м}{с}} \qquad (7)$$

1.3 «Переменная теплоемкость»



Количество теплоты, которое требуется на нагревание тела до некоторой температуры t, численно равно площади под графиком зависимости теплоемкости от температуры. Выразим это количество теплоты

$$Q(t) = \frac{1}{2}\left(C_0 + C(t)\right)(t - t_0). \qquad (1)$$

Значения теплоемкости тела при температуре t можно выразить из графика линейной зависимости

$$C(t) = C_0 + \frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}(t - t_0). \qquad (2)$$

С другой стороны количество поступающей теплоты выражается через мощность нагревателя

$$Q = P\tau, \qquad (3)$$

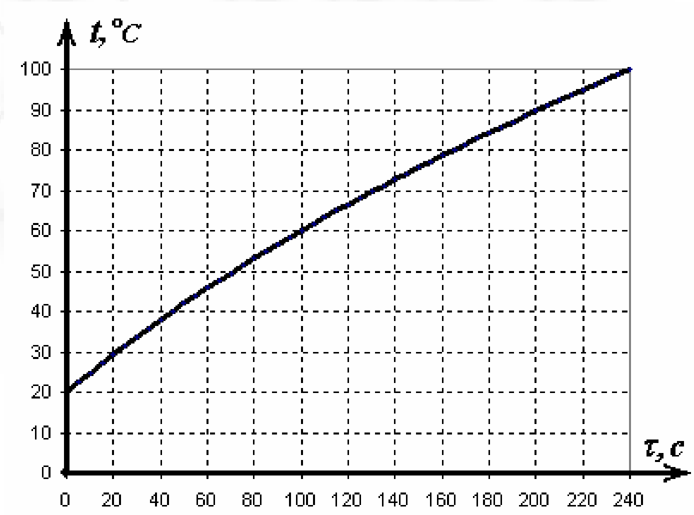
здесь τ - время нагревания.

Таким образом, для определения зависимости температуры бруска от времени имеем квадратное уравнение

$$\frac{1}{2}\left(C_0 + C_0 + \frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}(t - t_0)\right)(t - t_0) = P\tau. \qquad (4)$$

Решение которого не составляет труда (отрицательный корень отбрасываем)

$$(t - t_0) = \frac{\sqrt{4C_0^2 + 8P\tau\frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}} - 2C_0}{2\frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}}$$



Подстановка численных значений приводит к функции, описывающей зависимость температуры от времени (время задается в секундах):

$$t(\tau) = 20\sqrt{16 + 0{,}20\tau} - 60. \qquad (6)$$

График этой функции показан на рисунке.