Задание 2 «Вверх – вниз»

1) Рассмотрим струю жидкости радиусом r, движущуюся со скоростью υ_0 по трубе. За промежуток времени Δt через произвольное поперечное сечение AB (рис. 3) струи площадью $S = \pi r^2$ пройдет жидкость объемом

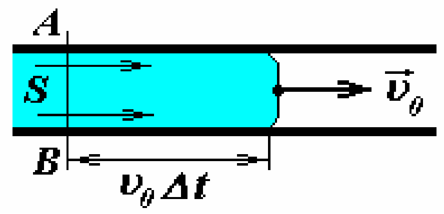


Рис. 3

$$V = S \cdot h = S\,\upsilon_0 \Delta t = \pi r^2 \upsilon_0 \Delta t\,.$$

Соответственно для массового расхода в этом случае получаем

$$q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \frac{\rho \pi r^2 \upsilon_0 \Delta t}{\Delta t} = \rho \pi r^2 \upsilon_0\,. \qquad (1)$$

Из (1) найдем скорость жидкости в вертикальном сечении струи

$$\upsilon_0 = \frac{q}{\rho \pi r^2} = 5{,}6\,\frac{м}{c}\,. \qquad (2)$$

2) Поскольку жидкость несжимаема, то объем жидкости, попавший на поверхность за некоторый промежуток времени t должен быть равен объему цилиндра, который образует жидкость при растекании по поверхности (см. рис. 01).

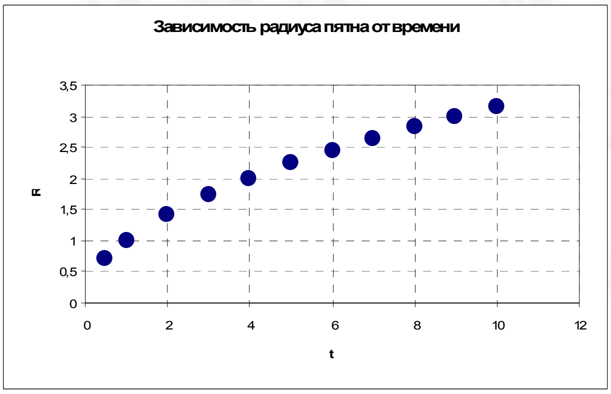
Пусть радиус пятна в рассматриваемый момент $R(t)$, тогда объем образовавшегося цилиндра найдем как $V = S \cdot h = \pi R^2(t) \cdot h$.

Из этого условия следует, что

$$m = qt = \rho V = \rho \pi R^2(t) h\,.$$

Из последнего равенства находим

$$R(t) = \sqrt{\frac{qt}{\rho \pi h}}\,. \qquad (3)$$



Таким образом, радиус пятна растекания жидкости по поверхности увеличивается с течением времени прямо пропорционально квадратному корню из времени течения

$$R(t) \sim \sqrt{t}\,.$$

Примерный график полученной зависимости (3) приведен ниже.

3) Пусть за малый промежуток времени Δt радиус пятна увеличился на ΔR ($\Delta R \ll R$) (рис. 4). Жидкость, поступившая на поверхность за промежуток времени Δt, «заполнит» выделенное на рисунке кольцо (сильно увеличено).

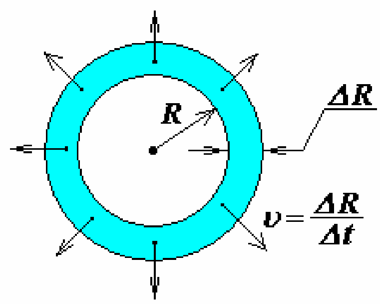


Рис. 4

Согласно полученному выражению (3) можем записать следующие равенства

$$R^2 = \frac{q}{\rho \pi h} \cdot t \qquad (4)$$

$$(R + \Delta R)^2 = \frac{q}{\rho \pi h} \cdot (t + \Delta t)\,. \qquad (5)$$

Вычитая из (5) равенство (4), найдем связь между малыми величинами Δt и ΔR

$$2R\Delta R + \Delta R^2 = \frac{q}{\rho\pi h}\cdot \Delta t\,.$$

Поскольку $\Delta R \ll R$, то в последнем равенстве можно пренебречь ΔR^2 по сравнению со слагаемым $2R\Delta R$.

Соответственно, для скорости $\upsilon(t)$ движения границы пятна по поверхности получаем

$$\upsilon(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{q}{\rho\pi h}\cdot\frac{1}{2R} = \left\{ R(t) = \sqrt{\frac{q\,t}{\rho\,\pi\,h}} \right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\rho\,\pi\,h}\cdot\frac{1}{t}}\,. \tag{6}$$

Таким образом, согласно (6) скорость $\upsilon(t)$ движения границы пятна убывает обратно пропорционально квадратному корню от времени

$$\upsilon(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

Для определения функции $\upsilon(t)$ можно также найти производную от выражения (3) по времени, что несколько быстрее приводит к ответу

$$\upsilon(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \left(\sqrt{\frac{q\,t}{\rho\,\pi\,h}}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\rho\,\pi\,h t}}\,. \tag{7}$$

Для получения графика (таблицы) зависимости (6) можно также «вручную» обработать зависимость (3) скажем, для 10 точек и нанести точки на график (см. рис.). При этом получается монотонно убывающий график искомой зависимости $\upsilon(t)$.

4) Радиус водяного купола на земле определяется величиной r, а также начальной горизонтальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$ струи на выходе из Т – образной конструкции (рис. 5) и временем $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ полета (падения) частиц воды с высоты H

$$R = r + \upsilon_0\,t\,.$$

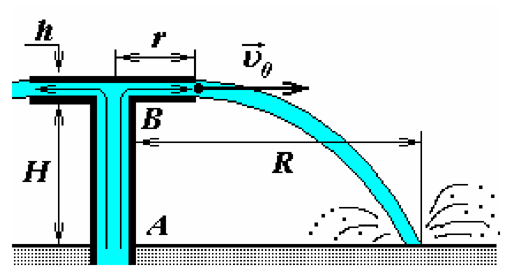


Рис. 5

Масса воды, входящей в трубу AB, должна быть равна массе воды, выходящей через боковую поверхность конструкции (купола). В противном случае вода накапливалась бы в куполе, чего не происходит.

Это соображение позволит нам вычислить начальную горизонтальную скорость $\vec{\upsilon}_0$ воды на выходе из купола.

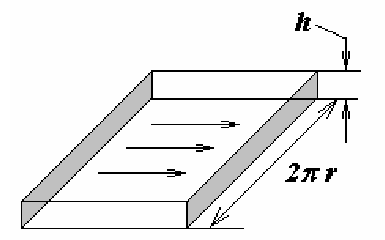


Рис. 6

Если мысленно «развернуть» боковую поверхность Т - образной конструкции, через которую выходит вода, то получим прямоугольник (выделен на рис. 6) со сторонами h и $2\pi r$.

Следовательно, расход воды через боковую поверхность купола можем записать в виде

$$q\Delta t = \rho\, 2\,\pi\, r\, h\,\upsilon_0 \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_0 = \frac{q}{2\,\pi\,\rho\, r\, h}\,.$$

Соответственно, радиус водяного купола найдем, зная время падения воды и ее начальную скорость

$$R = r + \upsilon_0 t = r + \frac{q}{2\pi\rho r h}\sqrt{\frac{2H}{g}}\,. \tag{8}$$

Расчет по (8) дает

$$R = 1{,}2\,м\,.$$

Как следует из (8), при уменьшении h в $\eta = 2{,}0$ раза новый радиус купола на земле

$$R' = r + \upsilon_0 t = r + \frac{q}{\pi\rho r h}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 2{,}3\,м\,,$$

увеличится в $\eta = \dfrac{R'}{R} = 1{,}9$ раза.

Интересно, что в действующих установках «водяных куполов» при большом значении H поверхностное натяжение может даже «схлопнуть» купол так, что его радиус практически станет равным нулю. Однако при небольшой высоте купола влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь.

Задание 3 «Кинематическая диаграмма»

1. Доказательство можно провести формально. Центр масс системы, состоящей из двух материальных точек, определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_{ЦМ} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2 \qquad (1).$$

Аналогично определяется скорость центра масс:

$$\vec{v}_{ЦМ} = \frac{\Delta\vec{r}_{ЦМ}}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \qquad (2).$$

Т.е. вектор скорости центра масс составляется так же как вектор центра масс. Поэтому его конец (а точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых – в начале координат) также лежит между точками, соответствующими скоростям движения отдельных частиц.

2. Как следует из предыдущего пункта, точка, соответствующая центру масс до соударения должна лежать на отрезке 12, а после соударения на отрезке $1'2'$. Кроме того, в результате столкновения скорость центра масс не изменяется. Значит, центр масс находится на пересечении этих отрезков. Обозначим эту точку буквой O.

3. Чтобы доказать, что четырёхугольник $11'22'$ является равнобокой трапецией, достаточно доказать, что треугольники $1O1'$ и $2O2'$ являются равнобедренными. Действительно, в этом случае они окажутся подобными, а значит $\angle 1'1O = \angle 2'2O$, т.е. прямые $11'$ и $22'$ параллельны. Кроме того, из равнобедренности этих треугольников следует равенство треугольников $1O2'$ и $2O1'$, а значит и равенство «боков» трапеции.

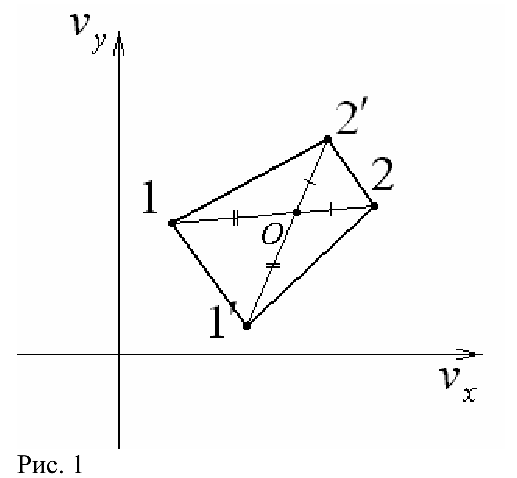


Рис. 1

С физической точки зрения равнобедренность упомянутых треугольников означает, что скорости движения частиц относительно их общего центра масс остаётся неизменной при соударении. Докажем это далеко не очевидный факт.