Соответственно, радиус водяного купола найдем, зная время падения воды и ее начальную скорость

$$R = r + \upsilon_0 t = r + \frac{q}{2\pi \rho r h}\sqrt{\frac{2H}{g}} . \qquad (8)$$

Расчет по (8) дает

$$R = 1,2\,м .$$

Как следует из (8), при уменьшении h в $\eta = 2,0$ раза новый радиус купола на земле

$$R' = r + \upsilon_0 t = r + \frac{q}{\pi \rho r h}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 2,3\,м ,$$

увеличится в $\eta = \dfrac{R'}{R} = 1,9$ раза.

Интересно, что в действующих установках «водяных куполов» при большом значении H поверхностное натяжение может даже «схлопнуть» купол так, что его радиус практически станет равным нулю. Однако при небольшой высоте купола влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь.

Задание 3 «Кинематическая диаграмма»

1. Доказательство можно провести формально. Центр масс системы, состоящей из двух материальных точек, определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_{ЦМ} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2 \qquad (1).$$

Аналогично определяется скорость центра масс:

$$\vec{v}_{ЦМ} = \frac{\Delta\vec{r}_{ЦМ}}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \qquad (2).$$

Т.е. вектор скорости центра масс составляется так же как вектор центра масс. Поэтому его конец (а точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых – в начале координат) также лежит между точками, соответствующими скоростям движения отдельных частиц.

2. Как следует из предыдущего пункта, точка, соответствующая центру масс до соударения должна лежать на отрезке 12, а после соударения на отрезке $1'2'$. Кроме того, в результате столкновения скорость центра масс не изменяется. Значит, центр масс находится на пересечении этих отрезков. Обозначим эту точку буквой O.

3. Чтобы доказать, что четырёхугольник $11'22'$ является равнобокой трапецией, достаточно доказать, что треугольники $1O1'$ и $2O2'$ являются равнобедренными. Действительно, в этом случае они окажутся подобными, а значит $\angle 1'1O = \angle 2'2O$, т.е. прямые $11'$ и $22'$ параллельны. Кроме того, из равнобедренности этих треугольников следует равенство треугольников $1O2'$ и $2O1'$, а значит и равенство «боков» трапеции.

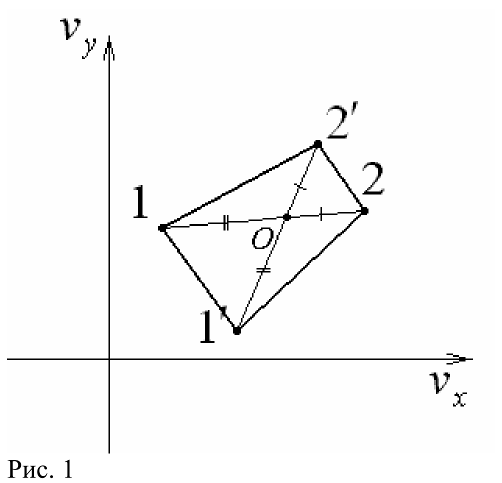

Рис. 1

С физической точки зрения равнобедренность упомянутых треугольников означает, что скорости движения частиц относительно их общего центра масс остаётся неизменной при соударении. Докажем это далеко не очевидный факт.

Обозначим скорость движения первой частицы относительно центра масс до соударения $\vec{u}_1$, а после столкновения – $\vec{u}_1'$. Аналогично для второй частицы $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_2'$. Закон сохранения импульса, записанный в системе центра масс до соударения:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \vec{0} \qquad (3)$$

Аналогично после соударения:

$$m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = \vec{0} \qquad (4).$$

Т.к. в этой системе отсчёта частицы движутся навстречу друг другу, то вектора $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ противоположно направлены. Т.е. законы сохранения импульса принимает вид:

$$m_1u_1 = m_2u_2 \qquad (5)$$

$$m_1u_1' = m_2u_2' \qquad (6)$$

Кроме того (удар абсолютно упругий) выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} = \frac{m_1u_1'^2}{2} + \frac{m_2u_2'^2}{2} \qquad (7).$$

Выражая u_1 из (5), а u_1' из (6) и подставляя в (7), получим, что $u_1 = u_1'$. Аналогично и $u_2 = u_2'$. Что и требовалось доказать.

Это можно легко понять исходя из следующих рассуждений. В системе центра масс скорость второй (первой) частицы однозначно выражается через скорость первой (второй). Значит кинетическая энергия системы, также однозначно определяется скоростью первой (второй) частицы. А раз механическая энергия сохраняется, то неизменной остаётся и скорость первой (второй) частицы.

4. Из предыдущего доказательства следует, что при рассеянии возможны только ситуации, когда $u_1 = u_1'$ и $u_2 = u_2'$. Значит, геометрическое место точек всех возможных рассеяний представляет собой две окружности с общим центром масс и радиусами u_1 и u_2 (см. рис. 2.).

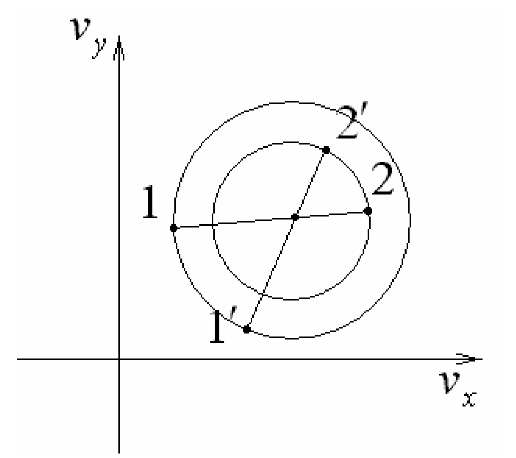

Рис. 2

5. Это столкновение изображено на рисунке 3. Точка $2'$, также как и точка 2, будет находиться на окружности большего радиуса. Вспомним ещё раз, что точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых находится в начале координат. Угол $212'$ и есть угол, на который поворачивается вектор скорости. Как видно, вектор скорости лёгкой частицы может повернуться на любой угол от нуля до 180 градусов в том или другом направлении.

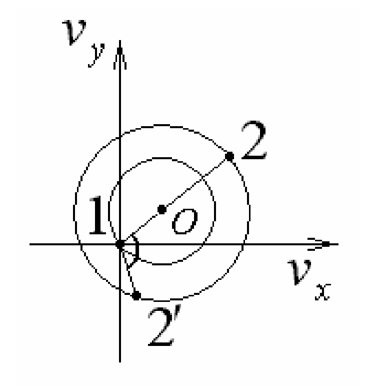

Рис. 3

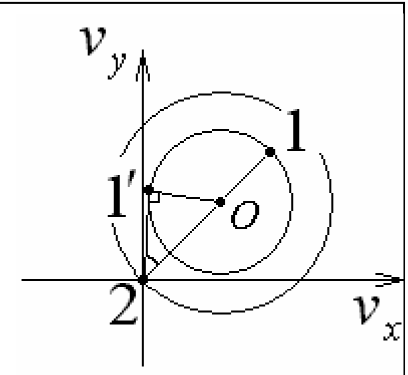

Рис. 4

6. В этом пункте ситуация иная. Теперь скорость рассеиваемой частицы принадлежит окружности меньшего радиуса (см. рис.4). Поэтому максимальное отклонение вектора скорости реализуется только в том случае, когда $21' \perp O1'$. Максимальный угол легко находится из треугольника $21'O$:

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (8),$$

т.к. $u_1 = \dfrac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}$, а $u_1 = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

10 класс.

1.1 Варистор.

Для начала необходимо определить, какое напряжение было на нагрузке до скачка напряжения. Сопротивление параллельно соединённых резистора и варистора не может превышать $10\,Ом$, поэтому и падение напряжения на этом участке будет на более 4В. Заметим, что при таком напряжении через варистор течёт очень маленький ток, т.е. его сопротивление очень большое и сопротивление этого участка в точности определяется сопротивлением нагрузки. Значит, до скачка на нагрузке было напряжение:

$$U_{H0} = \frac{U_0}{R + R_H} R_H = 4B \qquad (1).$$

Обозначим ток в цепи после скачка $I_Ц$. Общее напряжение есть сумма падений напряжения на резисторе R и напряжения на варисторе U:

$$RI_Ц + U = U_1 \qquad (2).$$

Ток в цепи есть сумма токов, текущих через нагрузку и варистор I:

$$I_Ц = \frac{U}{R_H} + I \qquad (3).$$

Поставляя это значение в (2) и используя численные значения U_1, R и R_H, получим уравнение, связывающее ток и напряжение на варисторе.

$$I = 2{,}4 - \frac{3}{20}U \qquad (4).$$

С другой стороны связь между током и напряжением приведена на графике. Чтобы определить U и I необходимо найти точку пересечения графика, приведённого в условии с графиком ВАХ.

Результат представлен на рис. 1.

Значения напряжения на варисторе, а значит и на нагрузке:

$$U = U_{H2} = 8{,}2B \qquad (5).$$

Т.е. напряжение на нагрузке возрастёт чуть больше чем в два раза:

$$\frac{U_{H2}}{U_{H1}} \approx 2 \qquad (6).$$

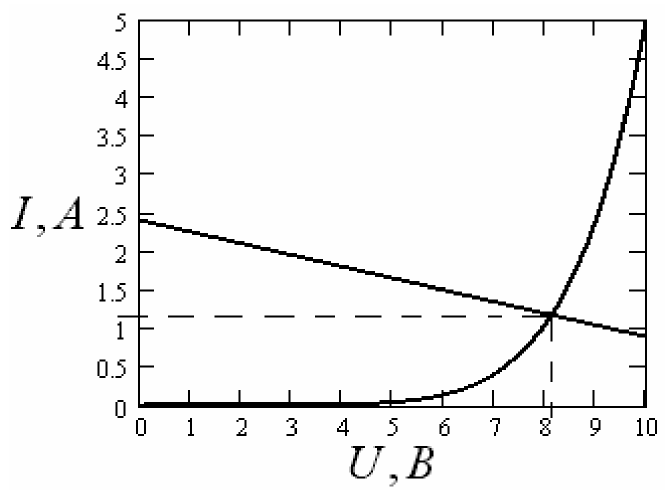

Рис. 1