11 класс.

Задача 1 . «Системы единиц»

Указанный в условии задачи факт ($1c = 3{,}00 \cdot 10^8 м$) следует из равенства единицы скорости света:

$$3{,}00 \cdot 10^8 \ \frac{м}{c} = 1 \qquad (1).$$

Проводя аналогичные рассуждения с постоянной Планка, можно получить выражение для килограмма и, соответственно, для всех остальных производных единиц.

1.1 Выразим Джоуль через основные единицы СИ (килограмм, метр и секунду):

$$Дж = \frac{кг \cdot м^2}{c^2} \qquad (2).$$

Тогда постоянная Планка равна:

$$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34} \ \frac{кг \cdot м^2}{c} \qquad (3).$$

Подставим значение одной секунды, выраженной через метры и приравняем $\hbar$ к единице.

$$1{,}05 \cdot 10^{-34} \ \frac{кг \cdot м^2}{3{,}00 \cdot 10^8 \, м} = 1 \qquad (4).$$

Решая уравнение (4) относительно килограмма, получим:

$$1кг = 2{,}86 \cdot 10^{42} \, м^{-1} \qquad (5).$$

1.2 Подставляя выражения для секунды и килограмма в уравнение (2), получим:

$$1Дж = \frac{2{,}86 \cdot 10^{42} \, м^{-1} \cdot м^2}{\left(3{,}00 \cdot 10^8 \, м\right)^2} = 3{,}17 \cdot 10^{25} \, м^{-1} \qquad (6).$$

1.3 Теперь необходимо двигаться в обратном направлении. Знаем, что

$$1Дж = \frac{1}{1{,}60 \cdot 10^{-19}} \, эВ = 6{,}25 \cdot 10^{18} \, эВ \qquad (7).$$

Выражение для одного метра легко получается из выражений (6) и (7):

$$3{,}17 \cdot 10^{25} \, м^{-1} = 6{,}25 \cdot 10^8 \, эВ \quad \Rightarrow \quad 1м = 5{,}07 \cdot 10^6 \, эВ^{-1} \qquad (8).$$

1.4 Т.к. $1c = 3{,}00 \cdot 10^8 \, м$, то, используя (8), получим:

$$1c = 1{,}52 \cdot 10^{15} \, эВ^{-1} \qquad (9).$$

1.5 Используя (5), получим:

$$1кг = 5{,}64 \cdot 10^{35} \, эВ \qquad (10).$$

1.6 Запишем второй закон Ньютона:

$$\frac{m_e v^2}{a_0} = F \qquad (11).$$

Отсюда сразу же находим кинетическую энергию электрона:

$$E_K = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{F a_0}{2} = 13{,}5 эВ \qquad (12).$$

2.1 Т.к. $1зр = 6{,}37 \cdot 10^6 \, м$, то

$$1м = \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6}\, зр = 1{,}57 \cdot 10^{-7}\, зр \qquad (13).$$

2.2 Из равенства первой космической единице, найдём выражение секунды через метры, а затем и через земные радиусы:

$$1с = 7{,}91 \cdot 10^3\, м = 1{,}24 \cdot 10^{-3}\, зр \qquad (14).$$

2.3 Из равенства единице гравитационной постоянной, получим:

$$1кг = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{с^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\, м^3}{\left(7{,}91 \cdot 10^3\, м\right)^2} = 1{,}07 \cdot 10^{-18}\, м = 1{,}67 \cdot 10^{-25}\, зр \qquad (15).$$

Интересно заметить, что в такой системе масса Земли равна земному радиусу, что следует из выражения для первой космической скорости:

$$v_{1K} = \sqrt{G\frac{M}{R}} \qquad (16).$$

2.4 Первая космическая скорость вблизи поверхности Луны в такой системе (в формуле (16) $G = 1$):

$$v_{Л} = \sqrt{\frac{M_{Л}}{R_{Л}}} = 0{,}212 \qquad (17).$$

Скорость в этой системе - величина безразмерная.

Ускорение свободного падения, вычисляется по формуле ($G = 1$):

$$g_{Л} = \frac{M_{Л}}{R_{Л}^2} = 0{,}165 зр^{-1} \qquad (18).$$

В то время как на поверхности Земли ускорение свободного падения равно одному обратному земному радиусу, т.е. в 6 раз больше.

Задача 2. «Копёр»

1. Запишем законы сохранения импульса и энергии.

$$\begin{cases} mv_0 = -mv_1 + P \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + E_1 \end{cases} \qquad (1),$$

где P и E_1 – импульс и энергия сваи после удара.

Импульс и энергия связаны соотношением:

$$P = \sqrt{2ME_1} \qquad (2).$$

Подставляя в систему (1), приведённые в условии выражения: $E_1 = \varepsilon_1 \cdot \dfrac{mv_0^2}{2}$ и $v_1 = \xi \cdot v_0$, а также используя соотношение (2), получим:

$$\begin{cases} 1 = -\xi + \sqrt{\dfrac{M}{m}}\sqrt{\varepsilon_1} \\ 1 = \xi^2 + \varepsilon_1 \end{cases} \qquad (3).$$

Решая систему (3), получим:

$$\xi = \frac{M - m}{M + m} \qquad (4),$$