$$1м = \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} зр = 1{,}57 \cdot 10^{-7} зр \qquad (13).$$

2.2 Из равенства первой космической единице, найдём выражение секунды через метры, а затем и через земные радиусы:

$$1с = 7{,}91 \cdot 10^3 м = 1{,}24 \cdot 10^{-3} зр \qquad (14).$$

2.3 Из равенства единице гравитационной постоянной, получим:

$$1кг = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{с^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} м^3}{\left(7{,}91 \cdot 10^3 м\right)^2} = 1{,}07 \cdot 10^{-18} м = 1{,}67 \cdot 10^{-25} зр \qquad (15).$$

Интересно заметить, что в такой системе масса Земли равна земному радиусу, что следует из выражения для первой космической скорости:

$$v_{1K} = \sqrt{G\frac{M}{R}} \qquad (16).$$

2.4 Первая космическая скорость вблизи поверхности Луны в такой системе (в формуле (16) $G = 1$):

$$v_Л = \sqrt{\frac{M_Л}{R_Л}} = 0{,}212 \qquad (17).$$

Скорость в этой системе - величина безразмерная.

Ускорение свободного падения, вычисляется по формуле ($G = 1$):

$$g_Л = \frac{M_Л}{R_Л^2} = 0{,}165 зр^{-1} \qquad (18).$$

В то время как на поверхности Земли ускорение свободного падения равно одному обратному земному радиусу, т.е. в 6 раз больше.

Задача 2. «Копёр»

1. Запишем законы сохранения импульса и энергии.

$$\begin{cases} mv_0 = -mv_1 + P \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + E_1 \end{cases} \qquad (1),$$

где P и E_1 – импульс и энергия сваи после удара.

Импульс и энергия связаны соотношением:

$$P = \sqrt{2ME_1} \qquad (2).$$

Подставляя в систему (1), приведённые в условии выражения: $E_1 = \varepsilon_1 \cdot \dfrac{mv_0^2}{2}$ и $v_1 = \xi \cdot v_0$, а также используя соотношение (2), получим:

$$\begin{cases} 1 = -\xi + \sqrt{\dfrac{M}{m}}\sqrt{\varepsilon_1} \\ 1 = \xi^2 + \varepsilon_1 \end{cases} \qquad (3).$$

Решая систему (3), получим:

$$\xi = \frac{M - m}{M + m} \qquad (4),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4mM}{(M+m)^2} \qquad (5).$$

2. Т.к. трение велико, то можно считать, что сила трения – величина постоянная и равна:

$$F_{TP} = kx_0 \qquad (6),$$

Для определения Δx_0 приравняем модуль работы сил трения к энергии E_1, полученной сваей после удара.

$$E_1 = F_{TP}\Delta x_0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \frac{mv_0^2}{2} = kx_0\Delta x_0 \qquad (7),$$

$$\Delta x_0 = \frac{\varepsilon_1}{kx_0} \cdot \frac{mv_0^2}{2} \qquad (8).$$

3. Т.к. молот после удара отлетает с такой же скоростью, то из закона сохранения импульса

$$mv_0 = -mv_0 + P \qquad (9)$$

сразу же получаем:

$$P = 2mv_0 \qquad (10).$$

Используя соотношение (2), находим:

$$E_2 = \frac{P^2}{2M} = \frac{4m^2v_0^2}{2M} = 4\frac{m}{M}\frac{mv_0^2}{2} \qquad (11).$$

Поэтому

$$\varepsilon_2 = 4\frac{m}{M} \qquad (12).$$

4. Подача топлива регулируется таким образом, что после удара молот обладает такой же энергией. Свая при этом опускается на некоторую глубину Δx_i. Т.е., когда молот снова опустится, его кинетическая энергия станет больше на величину

$$\Delta E = mg\Delta x_{i-1} \qquad (13),$$

и станет равной

$$\frac{mv_0'^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mg\Delta x_{i-1} \qquad (14).$$

Используя результат второго пункта (8), получим:

$$\Delta x_i = \frac{\varepsilon_1}{kx_i} \cdot \frac{mv_0'^2}{2} = \frac{\varepsilon_1}{kx_i}\left(\frac{mv_0^2}{2} + mg\Delta x_{i-1}\right) \qquad (15).$$

Кинетическая энергия $\frac{mv_0^2}{2}$ может быть выражена через глубину погружения после предыдущего удара (опять используем формулу (8)):

$$\Delta x_{i-1} = \frac{\varepsilon_1}{kx_{i-1}} \cdot \frac{mv_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_0^2}{2} = \Delta x_{i-1}\frac{kx_{i-1}}{\varepsilon_1} \qquad (16).$$

Тогда выражение (15) запишется в следующем виде:

$$\Delta x_i = \frac{\varepsilon_1}{kx_i}\left(\Delta x_{i-1}\frac{kx_{i-1}}{\varepsilon_1} + mg\Delta x_{i-1}\right) = \Delta x_{i-1}\left(\frac{x_{i-1}}{x_i} + \frac{mg\varepsilon_1}{kx_i}\right) \qquad (17).$$

Т.к. $\Delta x << x$, то с большой точностью

$$\frac{x_{i-1}}{x_i} \approx 1 \qquad (18).$$

Тогда искомая постоянная:

$$\lambda = \frac{mg\varepsilon_1}{k} \qquad (19).$$

5. Будем использовать соотношение, приведённое в четвёртом пункте. После первого удара свая погрузится на глубину

$$\Delta x_1 = \Delta x_0\left(1+\frac{\lambda}{x_1}\right) \qquad (20).$$

После второго:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1\left(1+\frac{\lambda}{x_1+\Delta x_1}\right) = \Delta x_0\left(1+\frac{\lambda}{x_1}\right)\cdot\left(1+\frac{\lambda}{x_1+\Delta x_1}\right) \qquad (21).$$

Т.к. с одной стороны $\Delta x_i << x_i$, а с другой мы проводим лишь оценку, то величиной Δx_1 в знаменателе можно пренебречь. Тогда

$$\Delta x_2 = \Delta x_0\left(1+\frac{\lambda}{x_1}\right)^2 \qquad (21).$$

Воспользуемся формулой приближённого вычисления $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$.

$$\Delta x_2 \approx \Delta x_0\left(1+2\frac{\lambda}{x_1}\right) \qquad (22).$$

Проделаем аналогичные рассуждения, для погружения после третьего удара:

$$\Delta x_2 = \Delta x_2\left(1+\frac{\lambda}{x_2+\Delta x_2}\right) = \Delta x_0\left(1+2\frac{\lambda}{x_1}\right)\cdot\left(1+\frac{\lambda}{x_1+\Delta x_1+\Delta x_2}\right) \approx$$
$$\approx \Delta x_0\left(1+2\frac{\lambda}{x_1}\right)\cdot\left(1+\frac{\lambda}{x_1}\right) \approx \Delta x_0\left(1+3\frac{\lambda}{x_1}\right) \qquad (23).$$

Таким образом, для оценки можно принять, что

$$\Delta x_i \approx \Delta x_0\left(1+i\cdot\frac{\lambda}{x_1}\right) \qquad (24).$$

Используя формулу для суммы арифметической прогрессии, получим приближённое выражение для величины погружения после десяти ударов:

$$h \approx \Delta x_0\left(10+55\frac{\lambda}{x_1}\right) \qquad (25).$$

Безусловно данная оценка является завышенной.

6. Используем приведенный в первом пункте факт – $v_1 = \xi \cdot v_0$.

После последнего удара с горючим, до первого удара без него пройдёт время

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} \qquad (26).$$

Промежуток времени между первым и вторым ударом:

$$t_2 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2v_0}{g}\cdot\xi \qquad (27).$$

Между вторым и третьим:

$$t_3 = \frac{2v_2}{g} = \frac{2v_0}{g}\cdot\xi^2 \qquad (28).$$

Таким образом, промежутки времени образуют убывающую геометрическую прогрессию ($\xi < 1$).

Удары прекратятся через время

$$T = \frac{2v_0/g}{1-\xi} \qquad (29).$$

Задача 3. Интерференция.

1. Складывая колебания, получим

$$E = E_1 + E_2 = E_0\cos(\omega t - \varphi_1) + E_0\cos(\omega t - \varphi_2) = \\ = 2E_0\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Таким образом, результирующая амплитуда равна

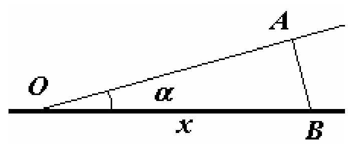
$$E_{0,рез.} = 2E_0\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right), \qquad (1)$$

соответственно, интенсивность равна

$$I = \left\langle\left(2E_0\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right)^2\right\rangle = 2E_0^2\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = \\ = 4I_0\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right), \qquad (2)$$

где I_0 - интенсивность света, создаваемая одной волной.

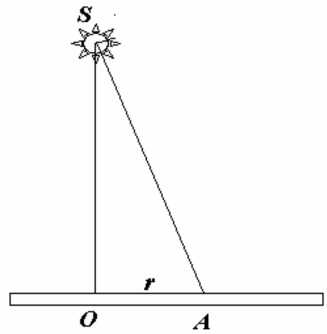
2. Выберем за начало отсчета точку O, фазу колебаний в которой примем за нуль. Тогда в точке B с координатой x фаза колебаний будет равна (набег на участке AB, OA - фронт волны)



$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} x\sin\alpha. \qquad (3)$$

От второй координаты фаза не зависит.

3. В точке A, находящейся на расстоянии r от начала отсчета O, фаза колебания равна



$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{L^2 + r^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{L^2 + x^2 + y^2}. \qquad (4)$$

4. Используя полученные выражения (2) и (3), запишем выражение для интенсивности света

$$I = 4I_0\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}x(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)\right) \qquad (5)$$

Таким образом, интерференционная картина представляет собой систему равноотстоящих прямых полос. Максимумы интенсивности будет в тех точках, где разность фаз равна $2\pi m, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2...)$, или

$$\frac{\pi}{\lambda}x_m(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) = \pi m \quad \Rightarrow \quad x_m = \frac{m\lambda}{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}. \qquad (6)$$

В случае малых углов ширина интерференционной полосы равна