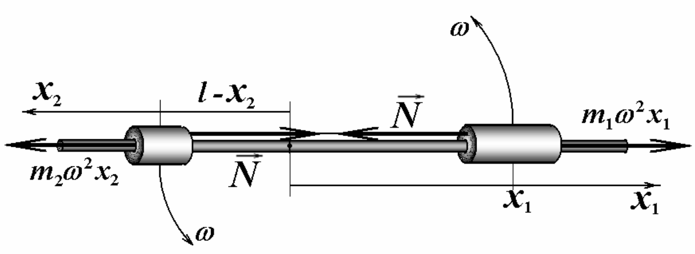
11 класс одиннадцатилетней школы.

Задание 11(11)-1. «Разминка»



1.1 Запишем уравнения динамики для каждого цилиндра в проекции на ось стержня (эта система не инерциальная)

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1\omega^2 x_1 - N \\ m_2 a_2 &= m_2\omega^2 x_2 - N \end{aligned}. \qquad (1)$$

Так как длина нити не изменяется, то $x_2 = (l - x_1)$, поэтому можно записать

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1\omega^2 x_1 - N \\ -m_2 a_1 &= m_2\omega^2 (l - x_1) - N \end{aligned}.$$

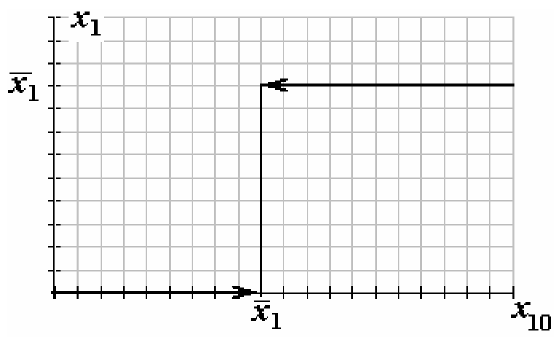
Вычитая из первого уравнения второе, получим уравнение, описывающее движение одного цилиндра

$$(m_1 + m_2)a_1 = (m_1 + m_2)\omega^2 x_1 - m_2\omega^2 l. \qquad (2)$$

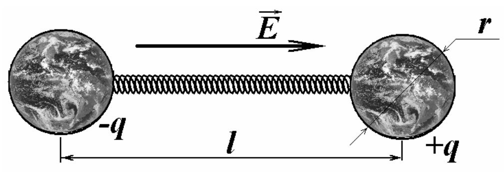
Координата положения равновесия описывается формулой

$$a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l. \qquad (3)$$

Не сложно показать, что это положение равновесия является неустойчивым: из уравнения (2) следует, что при $x_1 > \bar{x}_1$ ускорение этого цилиндра $a_1 > 0$, поэтому он будет смещаться дальше; и, наоборот, при $x_1 < \bar{x}_1$ ускорение $a_1 < 0$. Следовательно, при начальной координате меньшей координаты положения равновесия $x_{10} < x_1$ этот цилиндр сместится к оси вращения, в противном случае к оси вращения сместится второй цилиндр. Следовательно, координата первого цилиндра станет равной длине нити. В том же случае, когда $x_{10} = x_1$ конечное положение цилиндра однозначно не определяется, оно зависит от направления случайного начального сдвига цилиндров. Данная зависимость-ступенька показана на рисунке.



1.2 При включении электрического поля на шариках индуцируются электрические заряды. Так как шарики и пружинка проводящие, то разность потенциалов между шариками должна быть равной нулю. Учитывая, что $l \gg r$, условие эквипотенциальности можно записать в виде

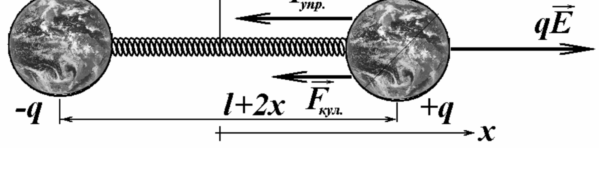


$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 r} = El. \qquad (1)$$

Следовательно, величины зарядов равны

$$q = 2\pi\varepsilon_0 r l E. \qquad (2)$$

Взаимодействие этих зарядов с электрическим полем приведет к смещению шариков и деформации пружины. Пусть каждый шарик сместился на расстояние x относительно центра пружины. Тогда



уравнение второго закона Ньютона для шарика примет вид

$$ma = qE - 2kx - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (l+2x)^2}. \quad (3)$$

Подставляя значение зарядов (с учетом их зависимости от расстояния), получим уравнение

$$ma = 2\pi\varepsilon_0 r(l+2x)E^2 - 2kx - \frac{(2\pi\varepsilon_0 r(l+2x)E)^2}{4\pi\varepsilon_0 (l+2x)^2}.$$

Последним слагаемым можно пренебречь в виду малости r. Таким образом, приходим к уравнению движения шарика

$$ma = -\left(2k - 4\pi\varepsilon_0 rE^2\right)x + 2\pi\varepsilon_0 rlE^2. \quad (4)$$

Из этого уравнения следует, что колебания возможны, только при условии, что

$$k > 2\pi\varepsilon_0 rE^2, \quad (5)$$

в противном случае, пружина не сможет сдержать силы электрического взаимодействия. При выполнении условия (5), уравнение (4) является уравнением гармонических колебаний, с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k - 4\pi\varepsilon_0 rE^2}}. \quad (6)$$

Из уравнения (4) следует, что положению равновесия соответствует значение

$$x_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 rlE^2}{2k - 4\pi\varepsilon_0 rE^2}. \quad (7)$$

Так как до включения поля $x = 0$, то формула (7) определяет и амплитуду колебаний каждого шарика.

1.3 В соответствии с законом Фика, скорость изменения числа молекул воздуха внутри пузыря описывается уравнением

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -D\frac{n - n_0}{h}S. \quad (1)$$

Величины, входящие в этой уравнение, необходимо выразить через радиус пузыря. Разность давлений воздуха внутри и снаружи пузыря равна Лапласовскому давлению:

$$P - P_0 = \frac{4\sigma}{R}. \quad (2)$$

Разность соответствующих концентраций можно выразить из уравнения состояния

$$(n - n_0) = \frac{P - P_0}{kT} = \frac{4\sigma}{kTR}. \quad (3)$$

Для записи формулы для числа молекул внутри пузыря также необходимо использовать формулу Лапласа и уравнение состояния

$$N = nV = n\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{P}{kT} = \frac{4\pi R^3}{3kT}\left(P_0 + \frac{4\sigma}{R}\right). \quad (4)$$

Формула для площади поверхности хорошо известна:

$$S = 4\pi R^2. \quad (5)$$

Наконец, толщина пленки выражается из условия постоянства ее объема:

$$h \cdot 4\pi R^2 = h_0 \cdot 4\pi R_0^2 \quad \Rightarrow \quad h = h_0\frac{R_0^2}{R^2}. \quad (6)$$

Собирая все формулы воедино, получим уравнение

$$\frac{1}{\Delta t}\Delta\left(\frac{4\pi R^3}{3kT}\left(P_0+\frac{4\sigma}{R}\right)\right)=-D\frac{4\sigma}{kTR}\cdot\frac{R^2}{h_0R_0^2}4\pi R^2 \quad\Rightarrow$$
$$\frac{\Delta\left(P_0R^3+4\sigma R^2\right)}{\Delta t}=-\frac{4\sigma D}{h_0R_0^2}R^3$$

Вычисление производной от сложной функции, приводит к окончательному выражению для скорости изменения радиуса пузыря:

$$\left(3P_0R^2+8\sigma R\right)\frac{\Delta R}{\Delta t}=-\frac{4\sigma D}{h_0R_0^2}R^3 \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta R}{\Delta t}=-\frac{4\sigma D}{h_0R_0^2}\frac{R^3}{3P_0R^2+8\sigma R}. \qquad (7)$$

Отметим, что, если пренебречь лапласовским давлением, по сравнению с атмосферным давлением, то данная скорость пропорциональна радиусу пузыря, то есть радиус пузыря убывает экспоненциально.

Так как, по условию задачи изменения радиуса мало, то для вычисления времени уменьшения радиуса можно пренебречь изменением радиуса пузыря и положить его равным R_0. Тогда искомое время определяется формулой

$$\Delta t=\Delta R\frac{h_0R_0^2}{4\sigma D}\cdot\frac{3P_0R_0^2+8\sigma R_0}{R_0^3}=\Delta R\frac{h_0\left(3P_0R_0+8\sigma\right)}{4\sigma D}. \qquad (8)$$

Задание 11(11)-2. «Гальваномагнитные явления»

Считаем электрон положительно заряженной частицей.

1. Электрон двигается с ускорением

$$a_X=\frac{eE_X}{m} \qquad (1)$$

в течение времени τ. За это время электрон набирает направленную скорость

$$v=a_X\tau=\frac{eE_X}{m}\tau \qquad (2).$$

Средняя скорость дрейфа

$$v_X=\frac{e\tau}{2m}E_X \qquad (3).$$

Коэффициент $1/2$ не имеет принципиального значения.

2. Подставляя значение $\frac{F}{e}=E_X$ в формулу (3), получим:

$$\mu=\frac{e\tau}{2m} \qquad (4).$$

3. Если электроны двигаются вдоль поля с дрейфовой скоростью $v_X=\mu E_X$, то создаваемая этим направленным движением плотность тока:

$$j_X=nev_X=ne\mu E_X=\sigma_0E_X \qquad (5),$$

откуда

$$\sigma_0=ne\mu \qquad (6).$$

4. Движение электрона вдоль оси OX приведет к появлению силы Лоренца, действующей в отрицательном направлении оси OY. В свою очередь движение вдоль оси OY приведёт к появлению силы Лоренца, действующей в положительном направлении оси OX. (Заряд электрона положительный.) Следовательно:

$$\begin{cases}F_X=eE_X+ev_YB_Z\\ F_Y=eE_Y-ev_XB_Z\end{cases} \qquad (7).$$