$$\frac{1}{\Delta t}\Delta\left(\frac{4\pi R^3}{3kT}\left(P_0+\frac{4\sigma}{R}\right)\right)=-D\frac{4\sigma}{kTR}\cdot\frac{R^2}{h_0R_0^2}4\pi R^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\left(P_0R^3+4\sigma R^2\right)}{\Delta t}=-\frac{4\sigma D}{h_0R_0^2}R^3$$

Вычисление производной от сложной функции, приводит к окончательному выражению для скорости изменения радиуса пузыря:

$$\left(3P_0R^2+8\sigma R\right)\frac{\Delta R}{\Delta t}=-\frac{4\sigma D}{h_0R_0^2}R^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta R}{\Delta t}=-\frac{4\sigma D}{h_0R_0^2}\frac{R^3}{3P_0R^2+8\sigma R}. \tag{7}$$

Отметим, что, если пренебречь лапласовским давлением, по сравнению с атмосферным давлением, то данная скорость пропорциональна радиусу пузыря, то есть радиус пузыря убывает экспоненциально.

Так как, по условию задачи изменения радиуса мало, то для вычисления времени уменьшения радиуса можно пренебречь изменением радиуса пузыря и положить его равным R_0. Тогда искомое время определяется формулой

$$\Delta t=\Delta R\frac{h_0R_0^2}{4\sigma D}\cdot\frac{3P_0R_0^2+8\sigma R_0}{R_0^3}=\Delta R\frac{h_0\left(3P_0R_0+8\sigma\right)}{4\sigma D}. \tag{8}$$

Задание 11(11)-2. «Гальваномагнитные явления»

Считаем электрон положительно заряженной частицей.

1. Электрон двигается с ускорением

$$a_X=\frac{eE_X}{m} \tag{1}$$

в течение времени τ. За это время электрон набирает направленную скорость

$$v=a_X\tau=\frac{eE_X}{m}\tau \qquad (2).$$

Средняя скорость дрейфа

$$v_X=\frac{e\tau}{2m}E_X \qquad (3).$$

Коэффициент $1/2$ не имеет принципиального значения.

2. Подставляя значение $\frac{F}{e}=E_X$ в формулу (3), получим:

$$\mu=\frac{e\tau}{2m} \qquad (4).$$

3. Если электроны двигаются вдоль поля с дрейфовой скоростью $v_X=\mu E_X$, то создаваемая этим направленным движением плотность тока:

$$j_X=nev_X=ne\mu E_X=\sigma_0E_X \qquad (5),$$

откуда

$$\sigma_0=ne\mu \qquad (6).$$

4. Движение электрона вдоль оси OX приведет к появлению силы Лоренца, действующей в отрицательном направлении оси OY. В свою очередь движение вдоль оси OY приведёт к появлению силы Лоренца, действующей в положительном направлении оси OX. (Заряд электрона положительный.) Следовательно:

$$\begin{cases}F_X=eE_X+ev_YB_Z\\ F_Y=eE_Y-ev_XB_Z\end{cases} \qquad (7).$$

Результирующая сила приведет к появлению дрейфовой скорости, составляющие которой связаны аналогичными соотношениями:

$$\begin{cases} v_X = \mu\left(E_X + v_Y B_Z\right) \\ v_Y = \mu\left(E_Y - v_X B_Z\right) \end{cases} \qquad (8).$$

Из системы (8) выразим v_X и v_Y.

$$\begin{cases} v_X = \dfrac{\mu\left(E_X + \mu E_Y B_Z\right)}{1+\mu^2 B_Z^2} \\ v_Y = \dfrac{\mu\left(E_Y - \mu E_X B_Z\right)}{1+\mu^2 B_Z^2} \end{cases} \qquad (9).$$

5. Если поле $E_Y = 0$, то исходя из (9):

$$\begin{cases} v_X = \dfrac{\mu E_X}{1+\mu^2 B_Z^2} \\ v_Y = \dfrac{-\mu^2 B_Z E_X}{1+\mu^2 B_Z^2} \end{cases} \qquad (10).$$

Если в отсутствие магнитного поля плотность тока:

$$j_X = nev_X = ne\mu E_X = \sigma_0 E_X \qquad (11).$$

То теперь:

$$j_X = nev_X = \frac{ne\mu E_X}{1+\mu^2 B_Z^2} \approx ne\mu E_X\left(1-\mu^2 B_Z^2\right) = \sigma E_X \qquad (12).$$

Следовательно, относительное изменение удельной проводимости:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{ne\mu - ne\mu\left(1-\mu^2 B_Z^2\right)}{ne\mu} = \left(\mu B_Z\right)^2 \qquad (13).$$

$$\gamma = 2 \qquad (13а).$$

6. Т.к. угол $\alpha << 1$ (поле слабое), то:

$$\alpha \approx tg\alpha = \frac{v_Y}{v_X} = \mu B_Z \qquad (14).$$

7. Заряды перестанут накапливаться на границах, если $v_Y = 0$. При этом, как следует из (9):

$$E_Y = \mu B_Z E_X \qquad (15).$$

$$H = 1 \qquad (16).$$

8. Подставив (15) в выражение для скорости v_X (9), получим:

$$v_X = \frac{\mu\left(E_X + \mu^2 B_Z^2 E_X\right)}{1+\mu^2 B_Z^2} = \mu E_X \qquad (17),$$

т.е. получается такое же значение, как и в отсутствие поля B_Z. Магнетосопротивления нет.

9. Полный ток в случае двух типов электронов:

$$j_X = j_{1X} + j_{2X} = nev_{1X} + nev_{2X} = ne\mu E_X + ne\cdot 2\mu E_X = 3ne\mu E_X \qquad (18).$$

$$\sigma_0 = 3ne\mu \qquad (19).$$

10. Для каждого сорта электронов можно записать систему уравнений (8).
Для первого типа ($\mu_1 = \mu$):

$$\begin{cases} v_{1X} = \mu\left(E_X + v_{1Y} B_Z\right) \\ v_{1Y} = \mu\left(E_Y - v_{1X} B_Z\right) \end{cases} \qquad (20).$$

Для второго типа ($\mu_2 = 2\mu$):

$$\begin{cases} v_{2X} = 2\mu(E_X + v_{2Y} B_Z) \\ v_{2Y} = 2\mu(E_Y - v_{2X} B_Z) \end{cases} \tag{21}$$

Решая эти системы относительно скоростей, получим:

$$\begin{cases} v_{1X} = \dfrac{\mu(E_X + \mu E_Y B_Z)}{1+\mu^2 B_Z^2} \\ v_{2Y} = \dfrac{\mu(E_Y - \mu E_X B_Z)}{1+\mu^2 B_Z^2} \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} v_{2X} = \dfrac{2\mu(E_X + 2\mu E_Y B_Z)}{1+4\mu^2 B_Z^2} \\ v_{2Y} = \dfrac{2\mu(E_Y - 2\mu E_X B_Z)}{1+4\mu^2 B_Z^2} \end{cases} \tag{23}$$

Ток вдоль оси OY прекратиться, если (концентрации электронов каждого типа одинаковы):

$$v_{1Y} = -v_{2Y} \tag{24}$$

Т.е.:

$$\frac{\mu(E_Y - \mu E_X B_Z)}{1+\mu^2 B_Z^2} = -\frac{2\mu(E_Y - 2\mu E_X B_Z)}{1+4\mu^2 B_Z^2} \tag{25}$$

Решая уравнение (25) относительно E_Y, получим:

$$E_Y = \frac{5}{3}\mu B_Z E_X \frac{1+\frac{8}{5}\mu^2 B_Z^2}{1+2\mu^2 B_Z^2} \tag{26}$$

Используя формулу приближённого вычисления $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ преобразуем дробь в уравнении (26).

$$\frac{1+\frac{8}{3}\mu^2 B_Z^2}{1+2\mu^2 B_Z^2} \approx \left(1+\frac{8}{5}\mu^2 B_Z^2\right)\cdot\left(1+2\mu^2 B_Z^2\right) \approx 1-\frac{2}{5}\mu^2 B_Z^2 \tag{27}$$

Тогда:

$$E_Y = \frac{5}{3}\mu B_Z E_X - \frac{2}{3}\mu^3 B_Z^3 E_X \approx \frac{5}{3}\mu B_Z E_X \tag{28}$$

Можно пренебречь, слагаемым порядка $\mu^3 B_Z^3$:

$$H = \frac{5}{3} \tag{29}$$

11. Подставив (28) в выражения для v_{1X} (22) и v_{2X} (23), получим:

$$v_{1X} = \frac{\mu E_X\left(1+\frac{5}{3}\mu^2 B_Z^2\right)}{1+\mu^2 B_Z^2} \tag{30}$$

$$v_{2X} = \frac{2\mu E_X\left(1+\frac{10}{3}\mu^2 B_Z^2\right)}{1+4\mu^2 B_Z^2} \tag{31}$$

Плотность тока:

$$j_X = ne(v_{1X} + v_{2X}) = ne\mu E_X\left(\frac{1+\frac{5}{3}\mu^2 B_Z^2}{1+\mu^2 B_Z^2} + \frac{2\left(1+\frac{10}{3}\mu^2 B_Z^2\right)}{1+4\mu^2 B_Z^2}\right) \tag{32}$$

Используя формулу приближённого вычисления, упростим выражение, стоящее в скобках, сохраняя только величины порядка $\mu^2 B_Z^2$.

$$\frac{1+\frac{5}{3}\mu^2 B_Z^2}{1+\mu^2 B_Z^2}+\frac{2\left(1+\frac{10}{3}\mu^2 B_Z^2\right)}{1+4\mu^2 B_Z^2}=$$

$$=\left(1+\frac{5}{3}\mu^2 B_Z^2\right)\cdot\left(1-\mu^2 B_Z^2\right)+2\cdot\left(1+\frac{10}{3}\mu^2 B_Z^2\right)\cdot\left(1-4\mu^2 B_Z^2\right)= \qquad (33).$$

$$=1+\frac{2}{3}\mu^2 B_Z^2+2\left(1-\frac{2}{3}\mu^2 B_Z^2\right)=3\left(1-\frac{2}{9}\mu^2 B_Z^2\right)$$

Тогда для плотности тока получим:

$$j_X=3ne\mu E_X\left(1-\frac{2}{9}\mu^2 B_Z^2\right) \qquad (34).$$

Относительное изменение удельной проводимости:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}=\frac{2}{9}(\mu B_Z)^2 \qquad (35).$$

$$\delta=\frac{2}{9} \qquad (36).$$

12. Менее подвижные электроны будут увлекаться полем E_Y вдоль положительного направления оси OY. На более подвижные электроны влияние силы Лоренца будет сильнее, поэтому вдоль оси OY они будут двигаться в отрицательном направлении.

Для определения углов, подставим значение поля E_Y (28) в (22) и (23). После некоторых преобразований получим:

$$\begin{cases} v_{1X}=\mu E_X\left(1+\frac{2}{3}\mu^2 B_Z^2\right) \\ v_{2Y}=\frac{2}{3}\mu^2 B_Z E_X \end{cases} \qquad (37),$$

$$\begin{cases} v_{2X}=2\mu E_X\left(1-\frac{2}{3}\mu^2 B_Z^2\right) \\ v_{2Y}=-\frac{2}{3}\mu^2 B_Z E_X \end{cases} \qquad (38).$$

Пренебрегая величинами порядка $(\mu B_Z)^3$, получим:

$$\alpha_1\approx tg\alpha_1=\frac{v_{1Y}}{v_{1X}}\approx\frac{2}{3}\mu B_Z \qquad (39).$$

$$\alpha_2\approx tg\alpha_2=\frac{v_{2Y}}{v_{2X}}\approx-\frac{1}{3}\mu B_Z \qquad (40).$$