Задание 11(11)-3. «Образование облаков»

Часть 1. Стационарная атмосфера.

1.1 Из формулы (1) следует, что

$$\Delta T = T_0 a \Delta z \tag{1}$$

Следовательно,

$$\Delta z = \frac{\Delta T}{T_0 a} \tag{2}$$

1.2 При подъеме на малую высоту Δz, давление уменьшается на величину

$$\Delta P = -\rho g \Delta z\,, \tag{3}$$

где ρ - плотность воздуха, зависящая от его давления и температуры. Эта зависимость выражается из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}\,. \tag{4}$$

Из уравнений (3)-(4) следует, что производная давления по высоте равна

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\rho g = -\frac{PM}{RT}g = -\frac{PMg}{RT_0(1-az)}\,. \tag{5}$$

С другой стороны, из формулы $P = P_0(1-az)^{\alpha}$ следует, что

$$P' = -\alpha a P_0 (1-az)^{\alpha-1}\,.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5) получим

$$-\alpha a P_0 (1-az)^{\alpha-1} = -\frac{P_0(1-az)^{\alpha} Mg}{RT_0(1-az)} = -\frac{P_0 Mg}{RT_0}(1-az)^{\alpha-1}\,. \tag{6}$$

Из этого выражения следует, что формула (2), приведенная в условии, удовлетворяет уравнению (5), при

$$\alpha = \frac{Mg}{aRT_0}\,. \tag{7}$$

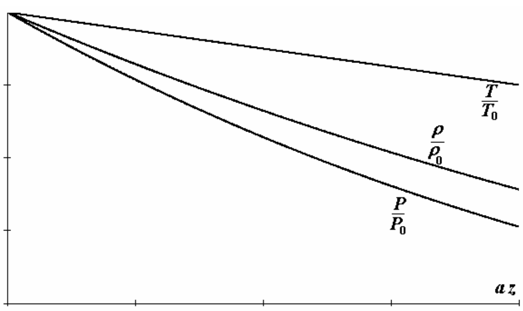
1.3 Формула, описывающая зависимость плотности от высоты следует из выражения (4) и найденной барометрической формулы

$$\rho(z) = \frac{PM}{RT} = \frac{MP_0(1-az)^{\alpha}}{RT_0(1-az)} = \frac{MP_0}{RT_0}(1-az)^{\alpha-1}\,. \tag{8}$$

Таким образом, показатель

$$\beta = \alpha - 1 = \frac{Mg}{aRT_0} - 1\,. \tag{9}$$

1.4 Схематические графики зависимостей температуры, давления и плотности от высоты показаны на рисунке. Важно отметить, что температура падает по линейному закону, давление убывает быстрее всего, а плотность занимает промежуточное значение.



Часть 2. Восходящие потоки.

2.1 Так как давление в поднимающейся порции воздуха следует считать равным давлению окружающего воздуха на любой высоте, то для определения зависимости ее температуры следует записать уравнение адиабатного процесса в «координатах» (T, P). Из уравнения состояния

$$\frac{PV}{T} = const$$

выразим

$$V = const \cdot \frac{T}{P}$$

и подставим в уравнение адиабатного процесса:

$$P\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma}} = P^{1-\gamma}T^{\gamma} = const \quad \Rightarrow \quad TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const .$$

Константу в этом уравнении можно выразить из условий на поверхности земли

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \tag{10}$$

Подставляя найденную зависимость давления от высоты, найдем зависимость температуры поднимающегося воздуха от высоты:

$$T_1(z) = T_0\left(\frac{P_0}{P_0(1-az)^{\alpha}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0(1-az)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha} . \tag{11}$$

Таким образом, в этой формуле показатель степени равен

$$\delta = \frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{aRT_0} . \tag{12}$$

2.2 Плотность воздуха выражается из уравнения состояния

$$\rho_1(z) = \frac{PM}{RT_1} = \frac{MP_0(1-az)^{\alpha}}{RT_0(1-az)^{\delta}} = \frac{MP_0}{RT_0}(1-az)^{\alpha-\delta} . \tag{13}$$

Показатель степени в этой формуле равен

$$\varepsilon = \alpha - \delta = \frac{Mg}{aRT_0} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{aRT_0} = \frac{1}{\gamma}\frac{Mg}{aRT_0} . \tag{14}$$

2.3 Подъем воздуха будет продолжаться, если на любой высоте его плотность меньше, чем плотность окружающего воздуха

$$\rho_1(z) < \rho(z). \tag{15}$$

Это условие будет выполняться, если показатель степени в формуле (13) будет больше, чем в формуле (8), то есть при $\alpha - \delta > \alpha - 1$, или при $\delta < 1$. Используя найденное значение этого параметра (12), найдем требуемое значение параметра a:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{aRT_0} < 1 \quad \Rightarrow \quad a > \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{RT_0} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-5}\,м^{-1} . \tag{16}$$

При этом значении параметра температура должна понижаться на один градус на высотах меньших, чем

$$\Delta z = \frac{\Delta T}{T_0 a} = \frac{1}{300 \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-5}} \approx 100 м . \tag{17}$$

Часть 3. Конденсация.

Для начала конденсации необходимо, чтобы температура поднимающегося воздуха стала равной температуре точки росы. Итак, пусть при температуре T_0 давление насыщенного пара равно $P_{нас.}(T_0)$, тогда парциальное давление водяных паров равно $\varphi P_{нас.}(T_0)$. Это давление есть давление насыщенных паров при температуре точки росы T_x:

$$\varphi P_{нас.}(T_0) = P_{нас.}(T_x). \tag{18}$$

Используя уравнение зависимости давления насыщенных паров от температуры, найдем температуру точки росы:

$$\ln\frac{P_{нас.}(T_x)}{P_{нас.}(T_0)} = \ln\frac{\varphi P_{нас.}(T_0)}{P_{нас.}(T_0)} = \ln\varphi = -\frac{qM_1}{R}\left(\frac{1}{T_x} - \frac{1}{T_0}\right) = -\frac{qM_1}{RT_0}\left(\frac{T_0}{T_x} - 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$T_x = \frac{T_0}{1 - \dfrac{RT_0}{qM_1}\ln\varphi}.$$

Теперь подставим выражение для зависимости температуры поднимающегося воздуха от высоты $T_1(z)$

$$T_0(1 - az)^{\delta} = \frac{T_0}{1 - \dfrac{RT_0}{qM_1}\ln\varphi}. \tag{19}$$

Для решения этого уравнения оценим численно

$$-\frac{RT_0}{qM_1}\ln\varphi = -\frac{8{,}3\cdot 300\cdot \ln 0{,}7}{2{,}2\cdot 10^6\cdot 18\cdot 10^{-3}} \approx 0{,}0224,$$

Эта величина является малой (по сравнению с 1), поэтому малой является и величина az, поэтому уравнение (19) можно упростить:

$$T_0(1 - az)^{\delta} = \frac{T_0}{1 - \dfrac{RT_0}{qM_1}\ln\varphi} \quad \Rightarrow \quad 1 - \delta az = 1 + \frac{RT_0}{qM_1}\ln\varphi.$$

Наконец, используя выражение для показателя степени δ, получим выражение для высоты образования облаков

$$\delta az = -\frac{RT_0}{qM_1}\ln\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{Mg}{aRT_0}az = -\frac{RT_0}{qM_1}\ln\varphi \quad \Rightarrow$$

$$z = -\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{(RT_0)^2}{qM_1 Mg}\ln\varphi = -\frac{1{,}4}{0{,}4}\frac{(8{,}3\cdot 300)^2\cdot \ln 0{,}7}{2{,}2\cdot 10^6\cdot 29\cdot 10^{-3}\cdot 18\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8} \approx 0{,}69\cdot 10^3\, м.$$