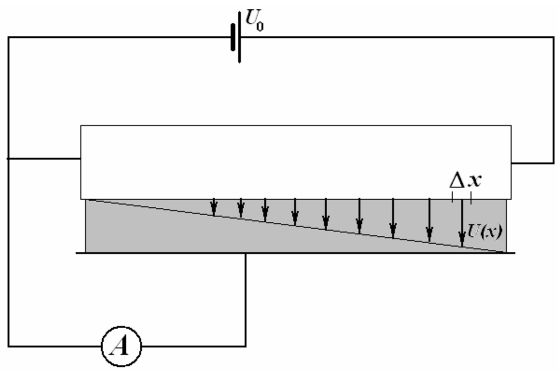
3.4 При решении данного пункта задачи следует учитывать, что ток течет поперек изоляционного слоя, причем распределение тока (точнее плотности тока) вдоль цилиндра не будет однородным. Так как сопротивление изоляции велико, то и измеряемый ток будет малым. Следовательно, распределение напряжений $U(x)$между элементом Δx цилиндра и хорошо проводящей трубкой будет примерно таким же, как при отключенном амперметре, то есть меняться по линейному закону от U_0 до нуля. Это дает основание использовать в качестве среднего напряжения между цилиндром и проводящей трубкой среднее арифметическое напряжений на концах цилиндра, то есть $\frac{U_0}{2}$. Следовательно, измеряемый ток равен



$$I = \frac{U_0}{2R'}. \tag{8}$$

Где $R' = \rho \frac{h}{2\pi rL}$ - сопротивление изоляционного слоя при протекание тока «поперек».

Таким образом, получаем

$$I = \frac{U_0 \cdot 2\pi rL}{2\rho h} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{U_0 \pi rLU_0}{Ih}. \tag{9}$$

11 класс.

<u>Задание 1.</u> Электрическое поле Земли

1.1 Согласно закону Гука удлинение пружины под действием силы тяжести $\Delta l_1 = \frac{mg}{k}$, где k – коэффициент упругости пружины. Отсюда можем выразить

$$k = \frac{mg}{\Delta l_1}. \tag{1}$$

После подключения шарика к источнику постоянного напряжения его потенциал относительно Земли станет равным напряжению источника. При этом на шарике появится электрический заряд q, который можно найти из условия

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = U \quad \Rightarrow \quad q = 4\pi\varepsilon_0 rU. \tag{2}$$

Соответственно, со стороны электрического поля Земли на шарик начнет действовать сила, направленная вниз и равная

$$F = qE = 4\pi\varepsilon_0 rUE. \tag{3}$$

Искомое удлинение пружины Δl_2 после замыкания ключа K найдем из равенства

$$k\Delta l_2 = mg + F \quad \Rightarrow \quad \Delta l_2 = \frac{mg+F}{k} = \frac{mg+F}{mg}\Delta l_1. \tag{4}$$

Таким образом, отношение удлинений пружины до и после замыкания ключа

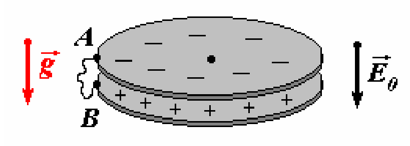
$$\varepsilon = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{\Delta l_1} = \frac{F}{mg} = \frac{4\pi\varepsilon_0 rUE}{mg}. \tag{5}$$

Расчет дает значение

$$\varepsilon \approx 1{,}0 \cdot 10^{-4}. \quad (6)$$

Как видим, удлинение пружины составит крайне малую величину, равную сотым долям процента от Δl_1. Зафиксировать столь малое смещение пружины будет практически невозможно. Следовательно предлагаемая методика измерения заряда планеты является неприемлемой.

1.2 При зарядке дисков в поле Земли посредством электростатической индукции на них появятся электрические заряды, которые, согласно принципу электростатической защиты, создадут электрическое поле, напряженность которого равна по модулю и противоположна по направлению напряженности $\vec{E}_0$ поля Земли (см. рис.). Считая, что диски образуют плоский конденсатор, найдем



$$q_0 = \sigma S = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 E\pi R^2, \quad (7)$$

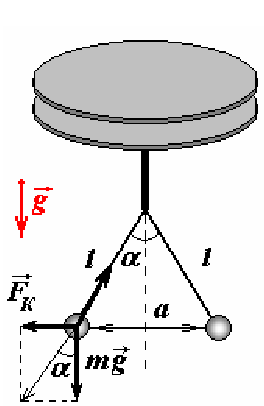
где σ – поверхностная плотность электрических зарядов на одном диске, S – площадь диска.

Как следует из рисунка, при зарядке на верхнем диске A окажется отрицательный заряд.

Соответственно, после разрыва проводника AB и переноса диска к электроскопу на диске электроскопа образуется положительный заряд такой же величины. Вследствие электронейтральности стержня электроскопа (он изолирован от корпуса диэлектрической прокладкой) на каждом из его шариков окажутся отрицательные заряды, равные по модулю $\frac{q_0}{2}$. Таким образом, после складывания $N = 10$ заряженных дисков вблизи электроскопа на каждом из его шариков появится отрицательный заряд $q = N\frac{q_0}{2}$.

Предположим, что под действием силы Кулона $\vec{F}_K$ нити электроскопа (с шариками) разошлись на малый угол 2α (см. рис.). Из условия равновесия шариков с учетом малости угла их расхождения ($\alpha \to 0$) получаем

$$\frac{F_K}{mg} = tg\alpha \approx \alpha \approx \frac{a}{2l}. \quad (8)$$



Поскольку $F_K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(N\frac{q_0}{2})(N\frac{q_0}{2})}{a^2}$, то выражение (8) можно переписать в виде

$$\frac{N^2 q_0^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2 mg} = \frac{a}{2l}. \quad (9)$$

Из (9) получаем оценку расстояния, на которое разойдутся небольшие шарики электроскопа после зарядки дисков

$$a = \sqrt[3]{\frac{N^2 q_0^2 l}{8\pi\varepsilon_0 mg}} = \sqrt[3]{\frac{\pi\varepsilon_0 l N^2 E^2 R^4}{8mg}}. \quad (10)$$

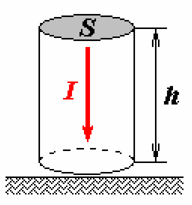
Расчет по формуле (10) дает

$$a = 4{,}9\,см. \quad (11)$$

Как видим из (11) шарики разойдутся на вполне регистрируемое расстояние. Заметим, что подобная методика была использована при одной из первых попыток измерения заряда Земли.

1.3 Поскольку высота, на которой находится ионосфера, мала по сравнению с радиусом Земли, то можно считать, что в промежутке между Землей и ионосферой напряженность электрического поля остается постоянной.

Мысленно выделим на поверхности Земли вертикальный цилиндр с площадью основания S и высотой h, упирающийся в ионосферу (см. рис.). Сопротивление воздуха внутри этого цилиндра



$$R = \rho \frac{h}{S}. \qquad (12)$$

Напряжение между торцами цилиндра найдем, используя связь между напряжением и напряженностью однородного электростатического поля

$$U = E \cdot h \qquad (13)$$

Применяя закон Ома, получим значение тока утечки

$$I = \frac{U}{R} = \frac{ES}{\rho}. \qquad (14)$$

Подставляя в (14) значение площади земной поверхности $S = 4\pi R_З^2$, окончательно получаем

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{4\pi R_З^2 E}{\rho} = 1{,}8\,кА. \qquad (15)$$

Полученное большое значение тока утечки в значительной степени обусловлено большим значением площади земной поверхности.

Для оценки времени τ разрядки Земли потребуем, чтобы за это время между ионосферой и Землей был перенесен заряд, равный заряду Земли. Будем также считать, что в процессе разрядки Земли сила тока остается постоянной, хотя в реальности она уменьшается вследствие уменьшения напряженности поля Земли. Тогда

$$I_1 \tau = \{(15)\} = \frac{4\pi R_З^2 E}{\rho} \tau = q.$$

С учетом выражения для напряженности $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R_З^2}$ электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью, преобразуем полученное равенство к виду

$$\frac{\tau}{\rho\varepsilon_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau = \rho\varepsilon_0. \qquad (16)$$

Расчет по формуле (16) дает неожиданный результат

$$\tau = 2{,}6 \cdot 10^2\,с = 4{,}3\,мин. \qquad (17)$$

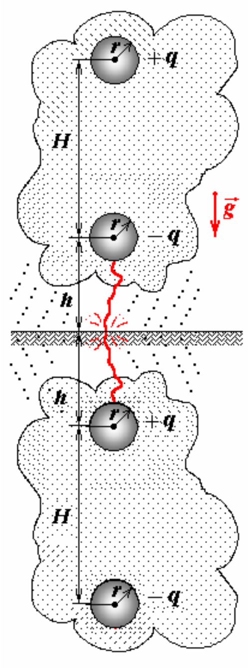
Таким образом, вследствие конечного сопротивления воздуха между Землей и ионосферой наша планета разрядилась бы довольно быстро и утратила бы свой электрический заряд. Однако наблюдения показывают, что заряд Земли не уменьшается с течением времени. Это говорит о том, что в природе существует механизм непрерывной зарядки Земли, обеспечивающий поступление новых порций заряда и компенсирующий ток утечки.

1.4 При достаточно сложном механизме формирования и распределения электрических зарядов внутри и на поверхности грозового облака ключевым моментом для возникновения молнии является возникновение *первичного канала* или *ступенчатого лидера*, который формирует траекторию основного электрического удара, производящего огромный термический, а также световой и звуковой эффекты.

Внутри этого канала проводимость воздуха значительно выше проводимости окружающего воздуха, а ток, как известно, достаточно «умен», поскольку выбирает путь наименьшего сопротивления.

Для расчета заряда грозовой тучи построим заряд-изображение небольшого сферического заряда ее нижней части, заряженной отрицательно, относительно проводящей поверхности Земли (см. рис). Тогда суммарная напряженность поля зарядов тучи и индуцированных зарядов на поверхности Земли может быть оценена как

$$2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{h^2} = E_1 \qquad \Rightarrow \qquad q = 2\pi\varepsilon_0 E_1 h^2 = 0{,}17\,Кл\,. \tag{18}$$



1.5 При силе тока утечки I_1 за сутки ($t = 86400\,c$) Земля потеряет заряд $q_1 = I_1 t$. Согласно условию, этот же заряд планета должна получить в результате грозовой активности. Таким образом

$$I_1 t = N_3 I_2 \tau_2 \qquad \Rightarrow \qquad N_3 = \frac{I_1 t}{I_2 \tau_2}. \tag{19}$$

Расчет дает, что каждые сутки на планете гремит около $N_3 \approx 2\cdot 10^4$ гроз, львиная доля которых приходится на тропические пояса Земли.

<u>Задание 2.</u> *«Ваттметр»*

1.1 Если по участку течет ток I, то падение напряжения на диоде

$$U_D = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{k}} \qquad (1),$$

а напряжение на резисторе

$$U_R = IR \qquad (2).$$

Сумма этих напряжений равна разности потенциалов на всем участке цепи:

$$U_D + U_R = \Delta\varphi \qquad (3).$$

Подставляя значения (1) и (2), получим квадратное уравнение относительно $\sqrt{I}$:

$$IR + \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{I} - \Delta\varphi = 0 \qquad (4).$$

Физический смысл имеет только положительный корень этого уравнения:

$$\sqrt{I} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \qquad (5).$$

Тогда

$$I = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}}\right)^2 \qquad (6).$$

1.2 Разность потенциалов на резисторе:

$$\Delta\varphi_R = IR = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}}\right)^2 R \qquad (7).$$

1.3 При выполнении условия $kR\Delta\varphi << 1$, формула (6) преобразуется к виду:

$$I \approx \left(\frac{-1 + (1 + 2kR\Delta\varphi)}{2R\sqrt{k}}\right)^2 = k(\Delta\varphi)^2 \qquad (8),$$

а формула (7) – к виду:

$$\Delta\varphi_R = Rk(\Delta\varphi)^2 \qquad (9).$$