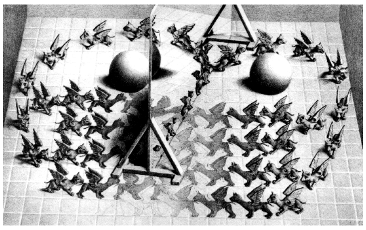
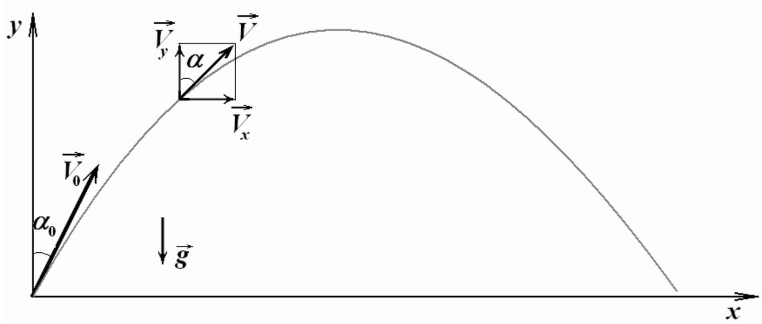


Задание 1. Оптико-механическая аналогия.

1. Движение тела в поле тяжести.

1.1 Решение данной части задачи хорошо известно. Так как ускорение направлено вдоль оси Oy, то закон равноускоренного движения имеет вид

$$\begin{cases} x = v_0 t \sin\alpha_0 \\ y = v_0 t \cos\alpha_0 - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (1)$$



1.2 Уравнение траектории получим, исключив из закона движения время t:

$$t = \frac{x}{v_0 \sin\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad y = v_0 \cos\alpha_0 \frac{x}{v_0 \sin\alpha_0} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \sin\alpha_0}\right)^2.$$

После упрощения получим функцию

$$y = x\,ctg\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \sin^2\alpha_0} x^2, \qquad (2)$$

описывающую параболическую траекторию движения.

1.3 Выражения для дальности полета и максимальной высоты подъема также хорошо известны:

$$S = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g}; \qquad h_{\max} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha_0}{2g}. \qquad (3)$$

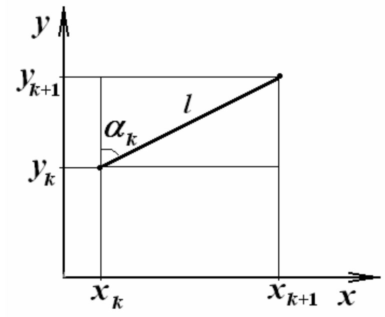
1.4 Можно заметить, что произведение модуля скорости на синус угла α является проекцией скорости на горизонтальную ось Ox: $v\sin\alpha = v_x$, которая остается неизменной в процессе движения, так как нет внешних сил, изменяющих эту проекцию скорости.
Таким образом, искомой функцией $f(y)$ может служить модуль скорости тела, который может быть найден из закона сохранения энергии

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} = v_0\sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} y}. \qquad (4)$$

Таким образом, уравнение (1), приведенное в условии задачи, может быть записано в виде

$$\sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} y}\,\sin\alpha = \sin\alpha_0 \qquad (5)$$

1.5 Основная идея заключается в разбиении траектории на малые участки, предпочтительнее постоянной длины l. Допустим, мы нашли точку траектории с координатами (x_k, y_k). По известной зависимости угла координаты y, можно рассчитать угол, под которым будет направлен следующий малый участок траектории $\alpha_k = \alpha(y_k)$. Координаты конца очередного отрезка рассчитываются по формулам



$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + l\sin\alpha_k \\ y_{k+1} = y_k + l\cos\alpha_k \end{cases}. \qquad (6)$$

При заданных начальных координатах эта процедура позволяет однозначно построить всю траекторию движения. Таким образом, зависимость $\alpha(y)$ однозначно определяет траекторию движения.

<u>Примечание.</u> Можно показать, что задание функции $\alpha(y)$ позволяет записать дифференциальное уравнение, имеющее однозначное решение.

2. Луч света в слоисто-неоднородной среде.

Запишем закон преломления света в слоисто неоднородной среде

$$n(y)\sin\alpha = n_0 \sin\alpha_0,$$

И подставим выражение для зависимости показателя преломления от координаты y

$$n_0\sqrt{1-\gamma y}\sin\alpha = n_0 \sin\alpha_0. \qquad (7)$$

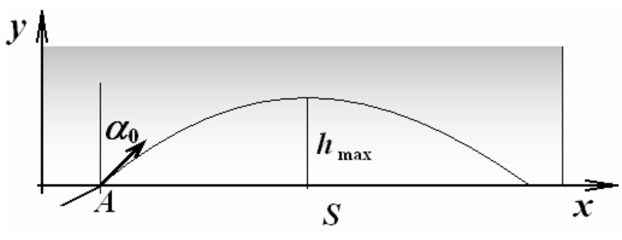
Это уравнение полностью совпадает с уравнением (5), определяющим траекторию движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Заметим, что в механике аналогом показателя преломления служит модуль скорости тела – неожиданный результат: там, где в оптике скорость луча возрастает, в механике должна убывать!

Для полного соответствия между уравнениями (5) и (7) следует положить

$$\gamma = \frac{2g}{v_0^2}. \qquad (8)$$

Следовательно, траектория луча, описываемая уравнением (7), также является параболой, с параметрами, определяемыми формулами (3). Поэтому для решения данной части задачи достаточно переписать формулы (4) с соответствующей заменой (8)



$$\begin{aligned} S &= \frac{2v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{\gamma} \\ h_{\max} &= \frac{v_0^2\cos^2\alpha_0}{2g} \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{\cos^2\alpha_0}{\gamma} \end{aligned}. \qquad (9)$$

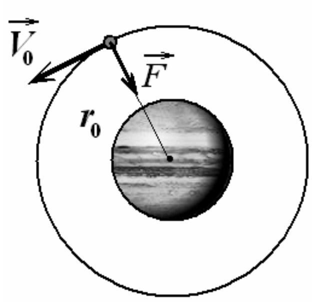
<u>Примечание.</u> Максимальную глубину проникновения света в брусок, можно найти из условия полного внутреннего отражения. На максимальной глубине проникновения $\sin\alpha = 1$, поэтому

$$n_0\sqrt{1-\gamma y}\,\sin\alpha = n_0\sin\alpha_0 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-\gamma h_{\max}} = \sin\alpha_0 \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{1-\sin^2\alpha_0}{\gamma} = \frac{\cos^2\alpha_0}{\gamma}\cdot$$

Найти подобным образом расстояние, на котором луч выйдет из бруска затруднительно.

3. Круговая орбита.



3.1 При движении по круговой орбите выполняется соотношение, следующее из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = G\frac{Mm}{r_0^2}\,. \tag{10}$$

Массу планеты можно выразить из формулы для ускорения свободного падения на поверхности планеты

$$g = G\frac{M}{R^2}\,. \tag{11}$$

Из этих выражений определяем соотношение между скоростью спутника и радиусом его круговой орбиты

$$v_0^2 = \frac{gR^2}{r_0}\,. \tag{12}$$

Откуда радиус орбиты

$$r_0 = \frac{gR^2}{v_0^2}\,. \tag{13}$$

3.2 Зависимость скорости спутника от его расстояния до центра можно выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r_0}\,. \tag{14}$$

С учетом соотношений (11) и (12), формула для скорости приобретает вид

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad -\frac{v_0^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} \quad \Rightarrow$$

$$v = v_0\sqrt{\frac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}\,. \tag{15}$$

3.3 Искомое соотношение проще вычислить, с помощью производной

$$\Delta v = v_r'\Delta r = \frac{v_0}{2\sqrt{\dfrac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}}\left(-\frac{2gR^2}{v_0^2 r^2}\right)\Delta r = -\frac{v_0}{\sqrt{\dfrac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}}\left(\frac{gR^2}{v_0^2 r^2}\right)\Delta r\,. \tag{16}$$

3.4 Полагая $r = r_0 = \dfrac{gR^2}{v_0^2}$, получим, что $\dfrac{gR^2}{v_0^2 r} = 1$. В этом случае из формулы (16) следует

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{v_0}{r_0}\,, \tag{17}$$

что и требовалось доказать.

4. Луч света в осесимметричной неоднородной среде.

Проводя аналогию между оптикой и механикой (показатель преломления аналогичен скорости тела!), можно утверждать, что условием возможности существования кругового луча является условие

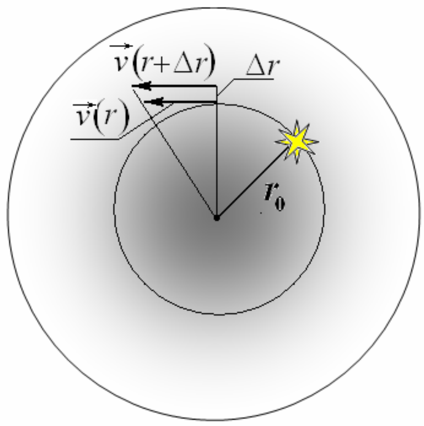
$$\frac{\Delta n}{\Delta r} = -\frac{n(r)}{r}. \qquad (18)$$

Используя заданную зависимость показателя преломления от радиуса $n(r) = n_0(1-\gamma r)$, найдем

$$\frac{\Delta n}{\Delta r} = -n_0\gamma.$$

Теперь из условия (18) определяем искомый радиус кругового луча

$$-n_0\gamma = -\frac{n_0(1-\gamma r)}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2\gamma}. \qquad (19)$$



<u>Примечание.</u> Основное условия существования кругового луча (18) может быть получено и без использования оптико-механической аналогии. Фронт этого луча должен поворачиваться так, чтобы оставаться направленным радиально. Это возможно в том случае, если выполняется условие

$$\frac{v(r+\Delta r)}{r+\Delta r} = \frac{v(r)}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r)}{r}.$$

Учитывая, что в «оптике» $v = \frac{c}{n}$ *(из которого следует* $\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{c}{n^2}\frac{\Delta n}{\Delta r}$*), получим*

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad -\frac{c}{n^2}\frac{\Delta n}{\Delta r} = \frac{c}{nr} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta n}{\Delta r} = -\frac{n}{r}.$$