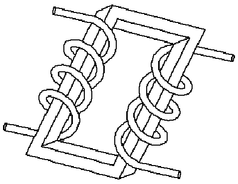

Задание 2. Электрические качели.

Часть первая. Толчок.

Обозначим площадь пластин конденсатора буквой S. Тогда его емкость:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (1).$$

1.1 При увеличении расстояния между пластинами на величину Δx, емкость конденсатора становится равной:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d + \Delta x} \qquad (2).$$

Относительное изменении емкости:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{C_1}{C_0} - 1 = \frac{d}{d + \Delta x} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{\Delta x}{d}} - 1 \approx -\frac{\Delta x}{d} = -\delta \qquad (3).$$

Причем это соотношение будет справедливо при любом d.

1.2 Т.к. перемещение мгновенное, заряд на конденсаторе не изменяется, поэтому:

$$C_0 U_0 = C_1 U_1 \qquad (4),$$

т.е.

$$U_1 = U_0 \frac{C_0}{C_1} \qquad (5).$$

Относительно изменение напряжения:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{U_1 - U_0}{U_0} = \frac{C_0}{C_1} - 1 = \delta \qquad (6).$$

Выражения для энергий:

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C_0}, \quad W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} \qquad (7),$$

где Q - заряд конденсатора.

Поэтому:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W_1 - W_0}{W_1} = 1 - \frac{W_0}{W_1} = 1 - \frac{C_1}{C_0} = \delta \qquad (8).$$

Периоды колебаний в контуре до и после перемещения равны соответственно:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC_0}, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1} \qquad (9).$$

Относительное изменение:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_1 - T_0}{T_0} = \sqrt{\frac{C_1}{C_0}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1+\delta}} - 1 \approx -\frac{1}{2}\delta \qquad (10).$$

1.3 Т.к. относительные изменения напряжения и энергии одинаковы (выражения (6) и (8)), то можно записать следующее равенство:

$$\frac{\Delta W}{\Delta U} = \frac{W}{U} \qquad (11),$$

из которого следует, что энергия пропорциональна напряжению, а их отношение остается постоянным:

$$\frac{W}{U} = const \qquad (12).$$

1.4 Аналогично, используя выражения (8) и (10), получаем:

$$\frac{\Delta W}{\Delta T} = -2\frac{W}{T} \qquad (13),$$

т.е. $W \sim T^{-2}$, следовательно:

$$WT^2 = const \tag{14}$$

Часть 2. Раскачка.

2.1 При возвращении пластин на первоначальное расстояние, энергия конденсатора не изменяется, т.к. эта операция проводится при нулевом напряжении на пластинах конденсатора. Поэтому два раза за период колебаний энергия увеличивается в $(1+\delta)$ раз.

Количество перемещений находит из условия:

$$(1+\delta)^n = 10 \tag{15}$$

Получаем:

$$n = \log_{1+\delta} 10 = \frac{\ln 10}{\ln(1+\delta)} = 231{,}4 \approx 231 \tag{16}$$

Т.к. увеличение энергии происходит дважды за период, то время необходимое для увеличения энергии в 10 раз:

$$t = \frac{n}{2}T_0 \approx 116T_0 \tag{17}$$

2.2 Т.к. сопротивление небольшое, то на протяжении половины периода напряжение изменяется по синусоидальному закону. Тогда средняя мощность, выделяемая на сопротивлении:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\frac{U_{\max}^2}{R} \tag{18}$$

Для поддержания колебаний необходимо, чтобы увеличение энергии за половину периода полностью компенсировало тепловые потери:

$$\frac{1}{2}\frac{U_{\max}^2}{R}\frac{T_0}{2} = \delta W_0 = \delta\frac{C_0 U_{\max}^2}{2} \tag{19}$$

Поэтому:

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{T_0}{RC_0} \tag{20}$$

Часть 3. Сбой по согласованию.

Предположим, что в начальный момент времени все происходит так, как было описано в предыдущих пунктах задачи. Затем, т.к. частоты не совпадают, увеличение расстояния между пластинами будет происходить не в моменты максимального напряжения на конденсаторе. Соответственно и энергия будет увеличиваться не так значительно. С другой стороны, при уменьшении расстояния между пластинами при ненулевом значении напряжения на конденсаторе, энергия будет уменьшаться. В целом, энергия будет увеличиваться до тех пор, пока значение напряжения на конденсаторе при увеличении расстояния между пластинами, будет больше такового при уменьшении расстояния. Затем энергия системы будет постепенно уменьшаться. Максимальная скорость уменьшения будет в том случае, когда увеличение расстояния между пластинами происходит при нулевом напряжении на них. Затем процесс пойдет в обратную сторону. Потери начнут уменьшаться, а прибыль – расти. Полное время таких изменений определим следующим образом. Обозначим за n, количество полупериодов, необходимых для возникновения первоначальной ситуации. Тогда можно записать следующее условие:

$$n\Delta t = \frac{T_0}{2} \tag{21}$$

Тогда искомый промежуток времени равен:

$$t = \frac{T_0}{2}n = \frac{T_0^2}{4\Delta t} \tag{22}$$